

Balmer- Serie

Experiment E101 — 13.04.2005
John Bieling and Andreas Orth*

Zusammenfassung. Wir werden in diesem Versuch das Spektrum von Wasserstoff auf einen Film aufnehmen und diesen entwickeln. Anschließend vermessen wir auf dem Photo an Hand von Referenzspektren die Balmerreihe des Wasserstoffs, und bestimmen daraus die Rydberg- Konstante.

*john.bieling@jobisoft.de and andyorth@web.de

Contents

1. Theorie **3**
1.1. Bohrsches Modell des Wasserstoffatoms 3
1.2. Quantenmechanische Berechnung des
Wasserstoffatoms 5
1.3. Spektroskopie 7
1.4. Das Hartmann- Verfahren 9

2. Versuchsaufbau **10**

3. Versuchsdurchführung **11**
3.1. Justierung 11
3.2. Das Photo 12
3.3. Graphische Bestimmung der Balmer-
Linien 14
3.4. Numerische Bestimmung der Balmer-
Linien 16
3.5. Bestimmung der Rydbergkonstanten . . 18
3.6. Bestimmung des Auflösungsvermögen . 20
3.7. Zusammenfassung und Diskussion . . . 21

Literatur

3 H.Haken, H.C.Wolf: Atom- und Quantenphysik,
Springer Verlag

7 Prof. Dr. Karsten Buse: Atomphysik, Skript zur gle-
ichnamigen Vorlesung WS 2004/2005

10 P.A.Tipler: Physik, Spektrum Lehrbuch

Versuchsbeschreibung
sowie die Protokolle anderer Studenten
und das Internet.

Layout (.sty-file für L^AT_EX 2_ε) by NORBERT
STUHRMANN, 2003.

1. Theorie

1.1. Bohrsches Modell des Wasserstoffatoms

1.1.1. Die drei Bohr'schen Postulate

Niels Bohr wurde 1885 in Kopenhagen geboren. Er konnte seine Modellvorstellung der Atome nur entwickeln, weil zu seiner Zeit zwei relativ neue Entdeckungen bereits bekannt waren:

Dank Rutherford wusste man, dass in Atomen die positiven Ladungsträger im Kern konzentriert sein mussten, und die Elektronen diesen umfliegen. Ebenfalls aktuell zu der damaligen Zeit war Einsteins Erklärung des photoelektrischen Effekts. Hierin begründete Einstein die Energieverteilung der ausgelösten Elektronen durch die Quantelung der Energie der auslösenden Photonen:

$$E = h \cdot \nu$$

Es war bis dato allerdings noch ein Rätsel, wieso die Spektren eines Atoms diskrete Linien besaßen, anstatt Licht mit kontinuierlicher Wellenlänge zu absorbieren und emittieren. Niels Bohr gelang mit seinem Modell durch die Kombination der beiden oben genannten Entdeckungen die Erklärung dieses Phänomens:

Er führte die diskreten Spektrallinien eines Atoms auf diskrete Energien zurück, welche die Atome abgaben. Er folgerte, dass hierzu zwei konstante energetische Niveaus des Atoms nötig seien.

Bohr schloss, dass die Energie eines Atoms nicht im stationären Kern gespeichert sein konnte. Folglich waren die diskreten Niveaus der Atom eigentlich diskrete Niveaus der Elektronen. Das Zweikörper- Problem war damals schon (zum Beispiel aus der Bewegung der Himmelskörper) bekannt. Hier hängt der Radius der Umlaufbahn unmittelbar mit der Energie des leichteren Körpers zusammen. Und so gelang es Bohr, die diskreten Energieniveaus eines Atoms richtigerweise auf bestimmte Bahnen der Elektronen zurückzuführen.

Sein Modell beinhaltet drei Postulate:

- Die Elektronen bewegen sich strahlungsfrei auf kreisförmigen Bahnen um den positiven Atomkern und gehorchen dabei den klassischen Gesetzen der Mechanik;
- diese Bewegung ist nur auf bestimmten Bahnradien, also mit diskreten Energien möglich, das Gebiet zwischen zwei benachbarten Bahnen ist für das Elektron verboten; und
- Strahlung emittiert das Atom, indem ein Elektron von einer höheren Bahn auf eine niedrigere herabfällt.

Es gilt auch hier Einsteins Formel:

$$\nu = \Delta E/h$$

wobei ΔE den Energieunterschied der zwei Bahnen bezeichnet.

1.1.2. Berechnung der Bahnradien und Energien

Bohr machte für die Kreisbewegung den Ansatz, dass die Coulomb- Anziehung von Kern und Elektron gerade die Zentrifugalkraft ausgleiche, und konnte damit die Elektronenbahnen genau berechnen. Auf eine genaue Rechnung sei hier verzichtet, man erhält für die möglichen Bahnradien und die dazugehörigen Energien:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2m_e} \cdot n^2$$

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{Z^2e^2m_e}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \frac{1}{n^2}$$

Fasst man die Konstanten zusammen,

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m_e}; R_\infty = \frac{1}{2} \frac{Z^2e^2m_e}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \cdot \frac{1}{hc} = \frac{Z^2e^2m_e}{8\epsilon_0^2h^3c}$$

vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt:

$$\Rightarrow r_n = \frac{a_0}{Z} \cdot n^2$$

$$\Rightarrow E_n = hcR_\infty \cdot \frac{1}{n^2}$$

Man nennt $a_0 \approx 52.9pm$ den Bohr'schen Radius (er entspricht dem ersten Bahnradius des Wasserstoffatoms), $R_\infty \approx 1.097 \cdot 10^5 cm^{-1}$ heißt Rydberg- Konstante.

Nun können wir die Wellenzahl des Photons bestimmen, welches beim Übergang zwischen zwei Niveaus (n und m) ausgesandt wird:

$$\Delta E = E_n - E_m = hcR_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{\Delta E}{hc} = R_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Hier erkennt man den Sinn des Vorfaktors $1/hc$ bei der Definition der Rydbergkonstanten. Diese Formel entspricht auch dem von Bohr bereits empirisch gefundenen Zusammenhang.

Die gesamte Rechnung kann man noch präzisieren, indem man die geringe Bewegung des Kerns mit in betracht zieht. Wie bei den Himmelskörpern entspricht die Rotation zweier Massen umeinander dem kreisen eines fiktiven Körpers mit der sog. „reduzierten Masse“ um den gemeinsamen Schwerpunkt. Formal erhält man das gleiche Ergebnis, nur setzt man anstatt der Elektronenmasse die reduzierte ein:

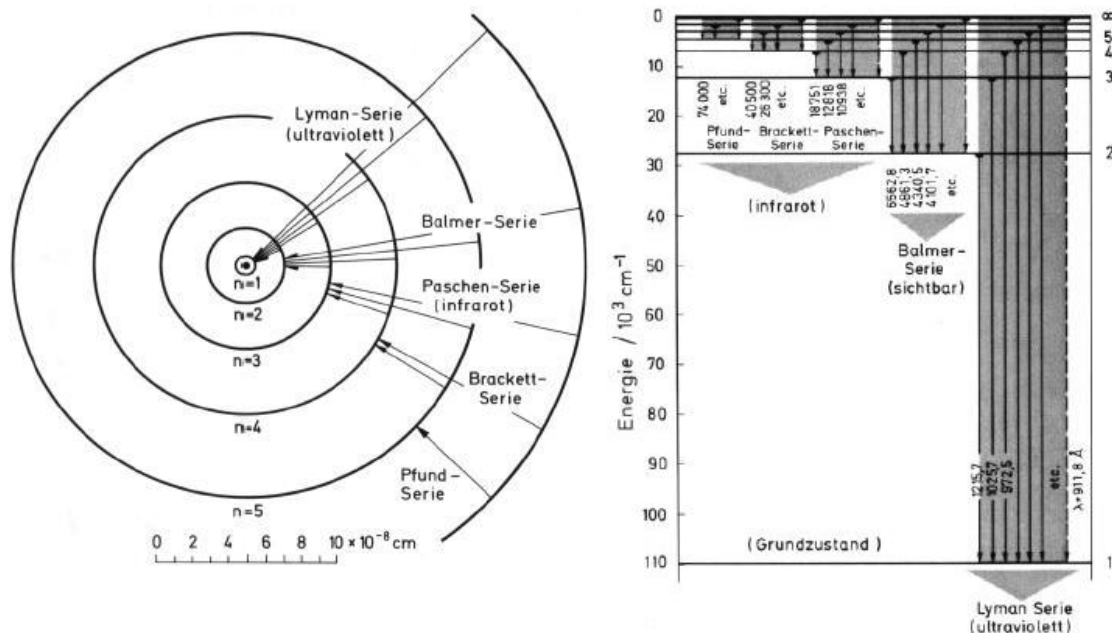
$$\mu := \frac{m_e \cdot M}{m_e + M}$$

$$R_H = R_\infty \cdot \frac{\mu}{m_e}$$

Die Werte von R_H und R_∞ unterscheiden sich um ca. $60cm^{-1}$

1.1.3. Das Wasserstoffspektrum

Man unterteilt die Spektrallinien des Wasserstoffs in sogenannte Serien. Entscheidend dabei ist, auf welchem Energieniveau das Elektron *ankommt*, dazu das folgende Diagramm:



Wie man sieht, liegt nur die Balmer- Serie im Bereich der sichtbaren Wellenlängen. Daher untersuchen wir im Versuch auch diese Linien.

1.2. Quantenmechanische Berechnung des Wasserstoffatoms

Vorab kann schon zusammenfassend gesagt werden, dass die folgenden Bemerkungen zwar alle sachlich richtig sind, auf Grund ihrer Größenordnung in diesem Versuch nicht aufgelöst werden können, und daher für die weitere Betrachtung ohne Interesse.

Berechnen wir das Wasserstoffatom nach den Gesetzen der Quantenmechanik, so müssen wir die stationäre Schrödinger Gleichung lösen. Der Hamiltonian ist in diesem Fall:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r}$$

Man überträgt das Problem in Kugelkoordinaten, und findet schließlich mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ als Lösungsansatz:

$$\Psi = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

wobei R_{nl} unter anderem ein Laguerresches Polynom enthält.

Man erhält also verschiedene Bahnen, die von den Quantenzahlen n, l, m abhängen. Diese bedingen einander:

$$l = 0, \dots, (n - 1); m = (-l), \dots, l$$

Die Energie, die ein Elektron auf einer dieser Bahnen besitzt, hängt jedoch nur von der Hauptquantenzahl n ab. Daher kommt es zu einer n^2 -fachen Entartung, da für jedes n genau n^2 verschiedene Bahnen (=Kombinationen der übrigen Quantenzahlen) möglich sind:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

Das klassische Analogon zu dieser Rechnung wurde von Sommerfeld als Ergänzung zum Bohrschen Modell aufgestellt. Es berücksichtigt, dass wie bei den Himmelskörpern auch elliptische Bahnen mit unterschiedlichen Bahngeschwindigkeiten das Zweikörperproblem lösen. Somit erhält man zu einer fixen Energie auch verschiedene Bahnformen. Die weitere Übertragung der quantenmechanischen Ergebnisse in eine bildliche Vorstellung wird zunehmend schwierig, und ist bis heute nicht befriedigend gelöst worden.

1.2.1. Aufhebung der Entartung

Will man die Entartung der unterschiedlichen Zustände aufheben, so muss man genauer rechnen, und kleine Feinheiten im Hamiltonian berücksichtigen. Dies soll hier nur kurz angedeutet werden:

- *Feinstruktur* - Die Elektronen besitzen einen zusätzlichen Freiheitsgrad, den Spin s . Die Relativbewegung von Kern und Elektron stellt für den mitbewegten Beobachter ein Magnetfeld dar, und der Spin kann sich gequantelt dazu einstellen. Man erhält zwei Lösungen für die „Spin- Bahn- Kopplung“, spin-up und spin-down, wodurch die Energie des Zustands angehoben oder abgesenkt wird, jedoch nur um einen Term, der um vier Größenordnungen kleiner als die Gesamtenergie ist.
- *Hyperfeinstruktur* - Auch der Atomkern besitzt einen Spin, und auch am Kernort wird durch die relative Elektronenbewegung ein Feld induziert. Jedoch koppeln Atomspin und Gesamtdrehimpuls um ca. drei Größenordnungen schwächer, auf Grund des Massenunterschiedes zwischen Elektron und Proton.
- *Relativistische Korrektur* - Bewegte Materie gewinnt mit zunehmender Geschwindigkeit auch an Masse. Berücksichtigt man die unterschiedlichen Impulse der entarteten Bahnen, so kann durch diese Korrektur die Entartung der Zustände mit gleichen Quantenzahlen n und $j = l + s$ aufheben. Dieser Effekt hat die gleiche Größenordnung wie die Spin-Bahn-Kopplung.
- *Lamb-Shift* - Geblieben ist noch eine Entartung der Zustände, welche gleiche n und j besitzen, aber $\Delta l = -\Delta s$. Die Quantenelektrodynamik besagt jedoch, dass ein Elektron ständig im Rahmen der Unschärfe Photonen kurzzeitig emittiert und wieder absorbiert. Dadurch kommt es zu einer Abschirmung des Kerns und zu einer minimalen Verschiebung auch dieser Niveaus.

1.3. Spektroskopie

1.3.1. Die Gasentladungslampe

Um die atomspezifischen Spektren zu erzeugen, benutzen wir Gasentladungslampen. Sie bestehen aus Röhren, die mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt sind. In die Röhre sind Anode und Kathode einer Beschleunigungsspannung eingelassen, welche Elektronen auf dem Flug durch die Röhre hindurch beschleunigt. Bei genügend hoher Beschleunigung erreichen die Elektronen ausreichend Energie, um die Gasatome anzuregen. Beim Herabfallen der Atome in den Grundzustand (oder andere niedrigere Zustände) werden Photonen exakt der Spektralfrequenzen emittiert. Handelt es sich bei den gewünschten Atomen um Stoffe, die sich bei Raumtemperatur nicht im gasförmigen Aggregatzustand befinden, wird an einem Reservoir zusätzlich eine Heizung angebracht, um Dampf des entsprechenden Atoms zu erzeugen, welcher sich dann in der Lampe ausbreitet.

1.3.2. Linienbreite

Wir hatten gesagt, dass zu jedem möglichen Übergang zwischen zwei Niveaus eine diskrete Energie gehört. Experimentell stellt man jedoch bei genügend hoher Auflösung fest, dass jede Spektrallinie eine gewisse Struktur besitzt, vor allem eine endliche Breite. Dies kann am experimentellen Aufbau liegen, aber auch unter perfekten Bedingungen bleibt eine endliche Linienbreite erhalten. Wir zählen mögliche Ursachen auf:

- *natürliche Linienbreite* - Jedes System in der Natur strebt den energetisch günstigsten, d.h. niedrigsten Zustand an. Deshalb gehört zu jedem angeregten Niveau auch eine Lebensdauer, welche besagt, wie wahrscheinlich das Herabfallen in ein tieferes Niveau ist. Auf Grund der Heisenbergschen Unschärfere-lation hat ein sehr kurzlebiger Zustand eine große natürliche Breite. Kurzlebig heißt, wir können den Zeitraum, zu dem das Atom angeregt war, stark einschränken. Die große Linienbreite bedeutet für das Atom eine große Energieunschärfe, gemäß $\Delta E \Delta t \approx \hbar$. Man erhält das Profil einer Lorentzkurve.
- *Dopplerverbreiterung* - Im realen Versuch sind die Atome im Gas nicht in Ruhe, sondern bewegen sich frei im Raum. Dadurch werden Photonen mit einer Frequenzverschiebung emittiert, da sie bildlich gesehen „vom fahrenden Atom aus abgeschossen“ werden. Je nach Bewegungsrichtung relativ zur Beobach- tungsrichtung entsteht eine Verschiebung nach oben oder unten. Durch Kühlen des Gases kann dieser Effekt minimiert werden.
- *Stoßverbreiterung* - In Abhängigkeit von der freien Weglänge der Atome kann ein angeregtes Atom auch durch Stöße mit seinen Nachbarn Energie austauschen, wodurch die Linie breiter wird. Je größer die Lebensdauer des angeregten Zustands, desto wahrscheinlicher werden Stöße während der Anregungsdauer. Dieser Effekt wächst also mit der Lebensdauer, genau umgekehrt zur natürlichen Linienbreite. Auch er lässt sich durch Kühlung mindern, sowie durch geringere Füllmengen in den Gasröhren. Dadurch werden allerdings die Resonanzlinien auch insgesamt schwächer, so dass wieder einmal ein Kompromiss gefunden werden muss.

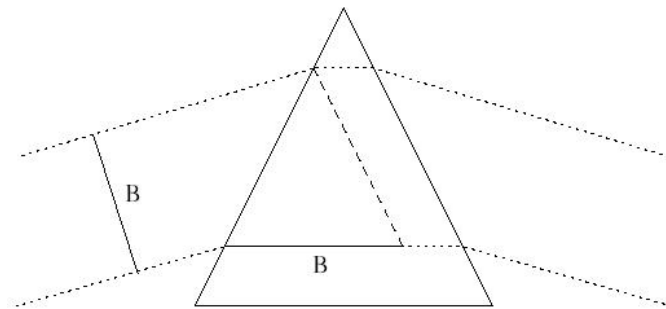
1.3.3. Der Prismenspektrograph

Um nun das Spektrum zu untersuchen, muss das emittierte Licht noch in seine Bestandteile aufgefächert werden. Das Herzstück des Prismenspektrographen ist ein Quarzprisma, wodurch man sich das Prinzip der Dispersion zu nutze macht.

Wir gehen davon aus, dass unser „weißes“ Licht parallel auf die schräg stehende Seite des Prismas einfällt. Bei der Brechung von Licht an einer Grenzschicht ist der Brechungsindex abhängig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes, dies nennt man Dispersion. Dadurch verlassen die verschieden farbigen Lichtbündel das Prisma auf unterschiedlichen Höhen der zweiten Seite, und unter unterschiedlichen Winkeln.

Wichtig für die spektrale Auflösung des Spektrometers ist die sogenannte ausgeleuchtete Basisbreite B . Sie beschreibt den Gangunterschied der Randstrahlen des Lichtbündels im Prisma. Je größer B , desto höher die Auflösung A . Da die Dispersion des Quarzprismas nicht linear mit der Wellenlänge verläuft, erhalten wir verschiedene maximale Auflösungen je nach Wellenlänge. Es gilt für den Fall minimaler Ablenkung der folgende Zusammenhang:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B \left| \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right|$$



1.4. Das Hartmann- Verfahren

Wir werden im Versuch das zu untersuchende Spektrum mit uns bekannten Referenzspektren vergleichen. Wir erhalten auf unserem Photo verschiedene belichtete Streifen für die unterschiedlichen Spektren, und vermessen die relative Lage d der Spektrallinien bezüglich eines beliebigen Punktes auf der x- Achse. Der erwartete Zusammenhang zwischen relativer Verschiebung und Wellenlänge ist nicht linear. Wir haben zwei Möglichkeiten:

- *graphisch* - entweder wir nähern den Zusammenhang global, d.h. stellen eine Funktion $\lambda(d)$ anhand der Referenzspektren auf, und setzen die gemessenen Werte des zu bestimmenden Spektrums in die Funktion ein; oder
- *numerisch* - wir errechnen diese Näherung numerisch für jeden einzelnen Messwert.

Wählen wir den zweiten Fall, so haben wir viele numerische Methoden zur Auswahl. Wir beschreiben hier das Hartmann- Verfahren: man wählt eine reziproke Funktion, und nimmt drei Freiheitsgrade an:

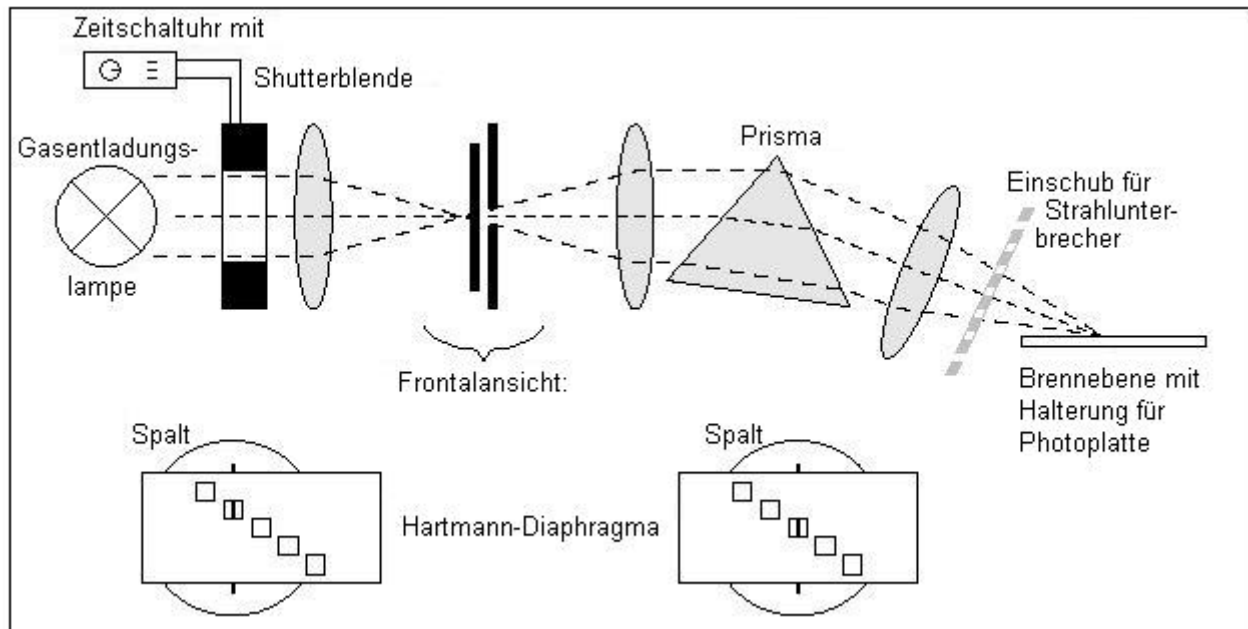
$$\lambda(d) = \frac{1}{d} \mapsto \lambda(d) = B \cdot \frac{1}{d - C} + A$$

Wir suchen uns für jeden Messwert drei bekannte Linien, die alle in der Nähe der unbekanntes Linie liegen, und setzen diese in die obige Gleichung ein. Daraus erhalten wir ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, welches die folgenden Lösungen liefert:

$$\begin{aligned} R &:= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{d_2 - d_3}{d_1 - d_2} \\ \Rightarrow C &= \frac{R \cdot d_1 - d_3}{R - 1} \\ \Rightarrow B &= (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{(C - d_1) \cdot (C - d_2)}{d_2 - d_1} \\ \Rightarrow A &= B \cdot \frac{1}{C - d_i} + \lambda_i \end{aligned}$$

Es sei hier (vor allem nach dem Sichten früherer Protokolle) noch einmal darauf hingewiesen, dass wir hierbei jeden Messwert einzeln annähern. Es müssen zu jeder Linie also drei neue Referenzpunkte gewählt werden.

2. Versuchsaufbau



Als Lichtquellen stehen drei *Gasentladungslampen* zur Verfügung. Die Hg- und HgCd- Lampen dienen der Erzeugung der Referenzspektren, die H- Lampe soll eigentlich untersucht werden. Sie können abwechselnd alle in eine Reihe mit dem gewünschten Strahlengang montiert werden.

Um gezielte Belichtungszeiten zu Erzielen, wird eine mit einem elektrischen *Shutter* versehene Blende auf der optischen Bank angebracht. Eine *Zeitschaltuhr* steuert die Öffnungszeit der Blende, so dass vor allem bei Leuchtstarken Lampen Belichtungszeiten von zehntel Sekunden eingestellt werden können.

Das Licht wird auf Höhe des *Spaltes* fokussiert. Das davor angebrachte *Hartmann- Diaphragma* ist gegenüber dem Spalt seitlich verschiebbar. Dadurch ist es möglich, gezielt unterschiedliche Bereiche des Spaltes auszuleuchten. Dadurch können die Spektren der verschiedenen Lampen sukzessive auf dem selben Film aufgenommen werden, nur in unterschiedlichen Höhen. Man erhält bis zu fünf einzelne Spektren übereinander.

Im *Prisma* wird das Licht wie oben beschrieben in seine spektralen Bestandteile aufgebrochen.

In der *Brennebene* schließlich wird das Licht wieder fokussiert, und kann hier auf verschiedene Untergründe gestrahlt werden. Zur Justierung der optischen Geräte kann eine Plexiglasscheibe in die Halterung eingebracht werden, auf der die Spektrallinien mit dem bloßen Auge auf ihre Schärfe kontrolliert werden können. Bei der späteren Versuchsdurchführung wird ein Film in den Halter eingeführt und daraufhin belichtet.

Um eine ungewollte Belichtung des Filmes während der Versuchsdurchführung zu vermeiden, kann in den Strahlengang zusätzlich ein *Unterbrecher* eingebracht werden.

3. Versuchsdurchführung

3.1. Justierung

Bevor das eigentliche Photo belichtet wurde, testeten wir die Apparatur mit allen Lampen und allen Diaphragmaeinstellungen. Ziel war es, alle Spektren scharf auf den Film zu bekommen, ohne zwischendurch die Apparatur neu justieren zu müssen. Wir konnten zu Kontrolle des Spektrums einen Schirm in die Halterung für den Film schieben. Es gab verschiedene Justierungsmöglichkeiten, die uns der Tutor vorher gezeigt hatte, um das Bild im ganzen Spektralbereich scharf einzustellen und die Linien möglichst gerade zu machen, so dass später die Eichspektren auch tatsächlich zur Eichung verwendet werden konnten. Auffällig dabei war, dass es nicht möglich war, alle 5 Diaphragma-Fenster gleich stark zu beleuchten. Durch die hohe Intensität der Hg-Lampe hatte dieser Umstand aber keine allzu große Bedeutung.

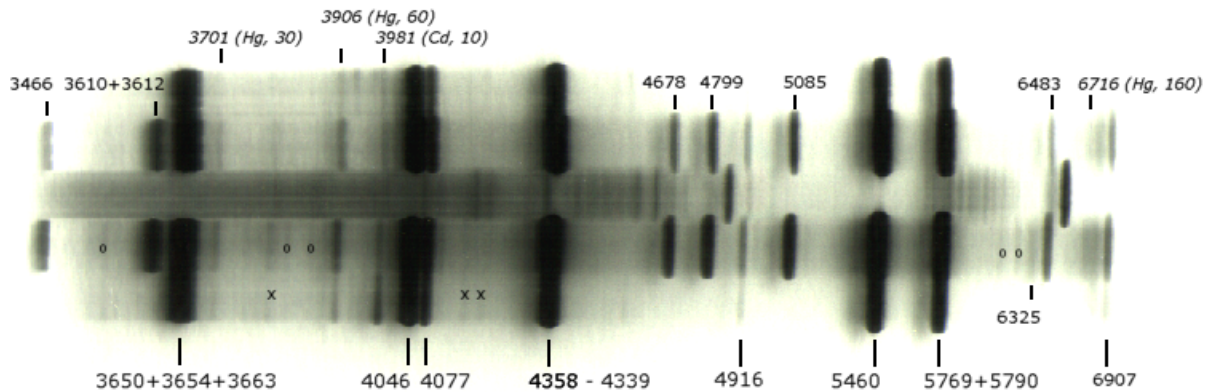
Nachdem die optimalen Abstände für die Lampen gefunden und der Kollimatorschlitz richtig eingestellt wurde, haben wir mit der Belichtung begonnen. Durch das Diaphragma konnten wir 5 verschiedene Spektren auf dem selben Photo mit verschiedenen Belichtungszeiten aufnehmen, im Detail

<u>Photostreifen</u>	<u>Lampe</u>	<u>Belichtungszeit</u>
1	Hg	1.0s
2	HgCd	2.0s
3	H	600.0s
4	HgCd	3.0s
5	Hg	1.5s

Während der Entwicklung haben wir parallel eine zweites und später ein drittes Photo aufgenommen. Ohne ersichtlichen Grund wurde das zweite Photo das beste, wobei keine Veränderungen am Aufbau durchgeführt wurden - einzig die Position des Diaphragmas hat sich durch die manuelle Einstellung bei jedem Photo verändert.

3.2. Das Photo

Das entwickelte Photo haben wir vermessen und in einem ersten Schritt markante Hg-Linien identifiziert, diese sind auf der unteren Seite des Photos eingetragen. Danach wurden die restlichen Linien eingordnet, diese Aufgabe hat sich als sehr schwierig erwiesen, da wir die Intensitätsangaben in der Versuchsbeschreibung durch die variierende Empfindlichkeit des Photopapiers nur bedingt verwendet konnten (die tatsächliche Empfindlichkeitsverteilung ist uns nicht bekannt). Teilweise erschienen daher Linien mit einer relativen Empfindlichkeit von 10 (z.B. 398,1 nm) so stark wie andere mit Werten größer 500.



Auf dem Foto sind alle Linien eingetragen, die wir am Ende identifiziert haben. Die kursiv eingetragenen Werte haben wir aber eher durch die entstandene Fit-Kurve gefunden, sie haben meist eine sehr geringe relative Intensität.

Obwohl die beiden Linien links der 632,5nm Linie auf dem Photo recht gut zu erkennen sind, haben wir sie beim Vermessen des Photos übersprungen. Sie hatten keine große Bedeutung für das numerische Verfahren und wir haben sie als zu schwach empfunden. Die 609,9nm und die 611,1nm Linie würden aber mit großer Wahrscheinlichkeit gut passen. Alle weiteren mit einem Kreis markierten Linien haben wir aus ähnlichen Gründen nicht vermessen. Die übrigen, mit einem Kreuz markierten Linien konnten wir nicht identifizieren, obwohl wir sie vermessen hatten: Wir haben in der Tabelle der Versuchsbeschreibung keine passenden Werte gefunden.

Für den Bereich zwischen der 370,1nm und der 390,6nm Linie müssen wir evtl. auch Messfehler dafür verantwortlich machen, dass es nicht wirklich passt - in unseren Augen passen aber die Abstände der Linien auch nicht wirklich zu den Literaturdaten. Uns war es jedenfalls nicht möglich, die gekreuzte Linie in diesem Bereich zuzuordnen. Die Spektrallinie bei 370,4nm (rel. Int. 35) läge zwar ungefähr dort, aber der gemessene Abstand ergibt einen Punkt weit von der Fit-Kurve entfernt. Die beiden schwachen Linien daneben (mit Kreis markiert) scheinen die 380,1nm (rel. Int. 30) und 390,1nm (rel. Int. 20) zu sein, wir haben sie jedoch nicht vermessen.

Die beiden gekreuzten Linien zwischen der 407,7nm und der 435,8nm Linie können wir ebenfalls keine passenden Hg-Linien zuordnen.

Zum Abschluss sind noch drei Linie besonders zu erwähnen. Die 398,1nm Linie ist im Photo als eine Hg-Linie zu erkennen, in der Literatur ist sie jedoch als Cd-Linie aufgeführt. Es gibt für uns keine andere Wellenlänge, die wir dieser Linie zuordnen können. Ebenfalls rätselhaft ist für uns die schwache Hg-Linie zwischen der 390,6nm und der 398,1nm, die aber nicht bis in das HgCd-Spektrum fortläuft. Eine Erklärung hierfür könnte eine Verunreinigung der Gase in den Lampen sein, oder aber eine Störung während der Belichtung durch die Beleuchtung der anderen FP- Gruppe im Nachbarraum.

Die dritte Linie, zu der kurz noch etwas gesagt werden muss, ist die 671,6nm (rel. Int. 160), diese ist auf dem Photo viel stärker zu erkennen und durch den Scan fast komplett verloren gegangen. Auf dem Scan mag daher die Zuordnung etwas eigenartig aussehen.

In der folgenden Tabelle sind die Zuordnungen zwischen Abstand und identifizierter Wellenlänge gelistet:

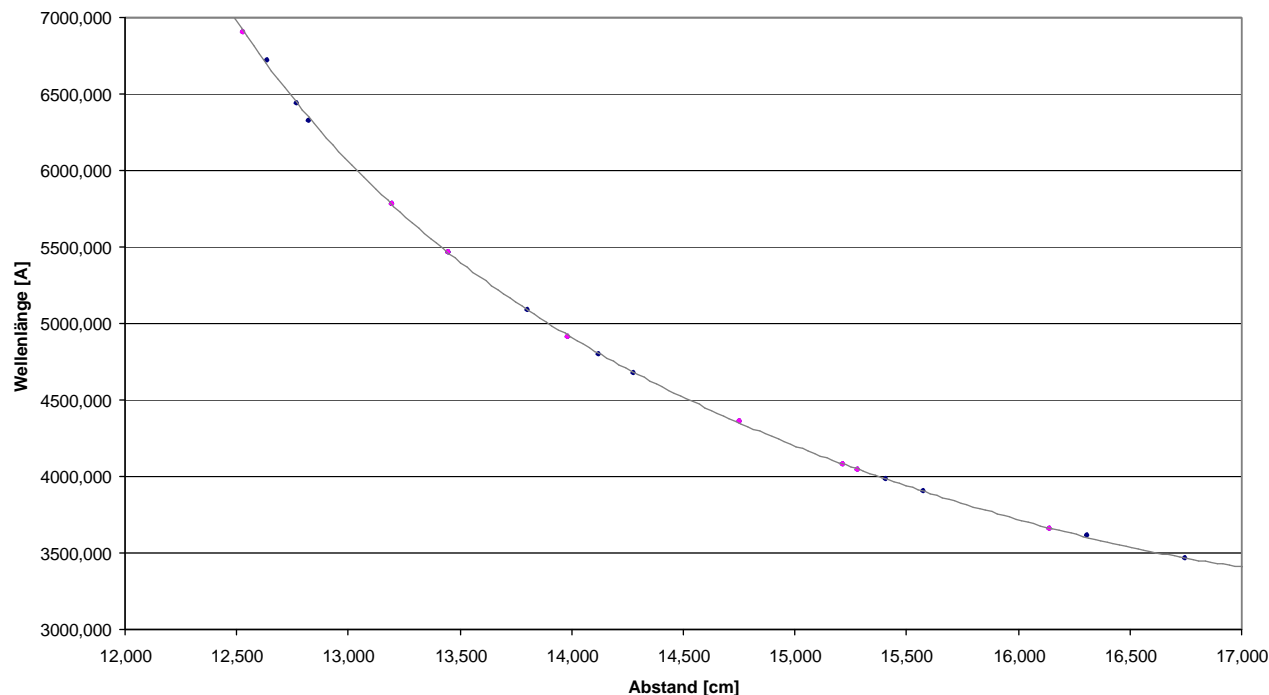
Linientyp	Abstand [cm]	Wellenlänge [\AA]
Hg	12,530	6907,000
Cd	12,635	6716,000
Cd	12,771	6438,470
Cd	12,825	6325,000
Hg	13,197	5780,130
Hg	13,450	5460,740
Cd	13,805	5085,822
Hg	13,985	4916,070
Cd	14,124	4799,912
Cd	14,278	4678,149
Hg	14,752	4358,330
Hg	15,215	4077,830
Hg	15,283	4046,560
Cd (!!!)	15,408	3981,926
Hg	15,574	3906,370
Hg	16,072	3701,440
Hg	16,138	3656,090
Cd	16,307	3610,508
Cd	16,745	3466,200

Es sind alle wichtigen Linien von 346,6nm bis 690,7nm auf unserem Photo zu erkennen. Außerdem ist die unterschiedliche Empfindlichkeit des Photopapiers, besonders die sehr hohe Empfindlichkeit zwischen 365nm und 440nm zu erkennen.

3.3. Graphische Bestimmung der Balmer-Linien

Aus den oben angegebenen Daten gewinnen wir das Eichdiagramm, wir haben dabei als Fit ein Polynom 6. Grades von Origin ansetzen lassen.

Eichkurve zur graphischen Bestimmung



Es wurden keine Fehlerbalken für die Ablesegenauigkeit eingetragen, da sie durch den Komparator nur $\Delta d = 0,005\text{cm}$ betrug und im Graphen somit fasst nicht zu erkennen ist.

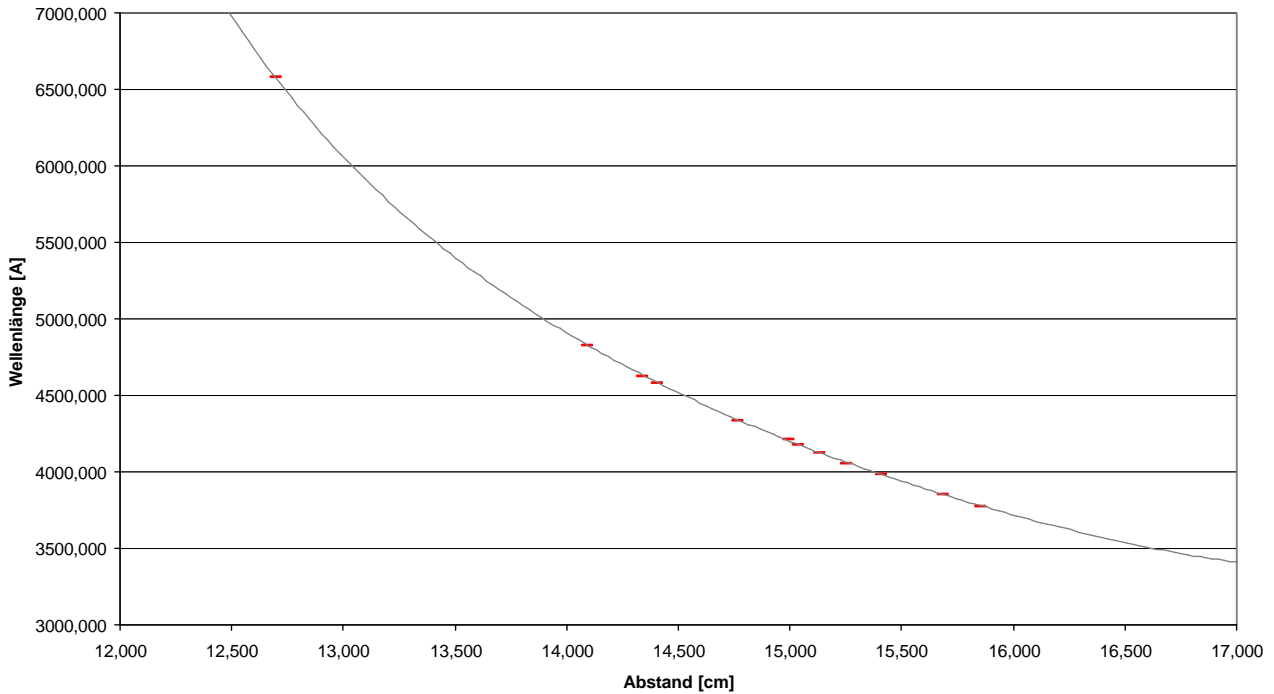
Die 8 roten Datenpunkte sind die stärksten Linien, bei denen eine Identifizierung am Einfachsten möglich war. Die anderen blauen Messpunkte haben sich oft auch direkt ergeben, einige jedoch konnten erst durch Eintragen in den Fit identifiziert werden.

Der Fit wird durch das folgende Polynom beschrieben:

$$\lambda = 6,14317 * 10^6 - 2,34488 * 10^6 d + 375261,35806 d^2 - 32160,86454 d^3 + 1555,36463 d^4 - 40,22568 d^5 + 0,43451 d^6$$

Wir haben nun unsere Abstandswerte für die Balmerlinien in das Polynom eingesetzt und die dazugehörigen Wellenlängen erhalten. Sie sind im folgenden Plot eingetragen:

Eichkurve zur graphischen Bestimmung



Im Detail ergeben sich folgende Werte:

Abstand [cm]	Wellenlänge [nm]	erkannte H-Linie
12,699	654,95	α (656,460nm)
14,092	479,50	β (486,269nm)
14,336	460,03	
14,406	454,80	
14,765	430,13	γ (434,168nm)
14,993	416,10	
15,034	413,69	
15,134	407,97	δ (410,289nm)
15,249	401,63	
15,409	393,21	ϵ (397,120nm)
15,681	379,92	ζ (389,017nm)
15,850	372,26	

Es wurden keine Fehler oder Ähnliches bestimmt, da dieser Teil nur dazu diente, durch grobe Näherung die Balmer-Linien auf dem Photo zu identifizieren. Dies gelang sehr deutlich. Im nächsten Abschnitt werden wir die Linien etwas genauer bestimmen.

3.4. Numerische Bestimmung der Balmer-Linien

Wir wenden jetzt das Hartmann-Interpolationsverfahren an, um die Balmer-Linien zu finden. Wie in der Theorie beschrieben, wählt man 3 Messpunkte in der Nähe einer vermuteten Balmerlinie und berechnet daraus die Parameter A, B, C und R kann dann über

$$\lambda = A + \frac{B}{d - C}$$

die eingeschlossene Balmer-Linie mit Abstand d berechnen. In der folgenden Tabelle sind zu den 5 Balmer-Linien (diese wurden durch die graphische Auswertung als solche identifiziert) die jeweils gewählten Hartmann-Messpunkte angegeben. Außerdem sind die in der Theorie angegebenen Hartmann-Parameter (untereinander) angegeben und die daraus resultierende Wellenlänge für die Balmerlinie. Die dazugehörigen Fehler sind ebenfalls aufgelistet.

d_B [cm]	d_H [cm]	λ_H [nm]	A-C,R	Δ A-C,R	λ [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]	$\lambda_{\text{Literatur}}$ [nm]
12,699	12,530	690,70	1,08E-06	1,02E-07	659,00	144,10	α (656,460)
	12,635	671,60	8,53E-09	1,85E-09			
	12,771	643,85	1,47E-01	2,34E-03			
14,092	13,805	508,58	2,58E-07	1,30E-07	482,56	184,40	β (486,269)
		491,61	6,23E-09	3,28E-09			
		479,99	1,13E-01	6,74E-03			
			1,13E+00	7,31E-02			
14,765	14,752	435,83	3,06E-07	5,84E-08	434,84	82,65	γ (434,168)
	15,215	407,78	2,16E-09	8,61E-10			
	15,283	404,66	1,31E-01	3,73E-03			
15,134	14,752	435,83	3,06E-07	4,61E-08	411,78	65,14	δ (410,289)
		407,78	2,16E-09	8,61E-10			
		404,66	1,31E-01	3,73E-03			
			1,32E+00	4,94E-02			
15,409	15,283	404,66	2,88E-07	7,83E-08	398,14	110,68	ϵ (397,120)
	15,408	398,19	2,50E-09	1,60E-09			
	15,574	390,64	1,31E-01	6,98E-03			
15,681	15,574	390,64	3,15E-07	2,45E-08	384,14	34,63	ζ (389,017)
		365,61	8,57E-10	2,67E-10			
		361,05	1,44E-01	2,12E-03			
			1,65E+00	3,46E-02			

Es fallen die großen Fehler für die berechneten Wellenlängen auf. Die Formeln für die Fehlerberechnung wurden jedoch mehrfach überprüft. Sie sind eine Folge der Interpolation, der Fehler wird größer je weiter die Hartmann-Linien von der zu bestimmenden Balmer-Linie entfernt sind. In unserem Fall ist aber deutlich zu sehen, dass die Abweichung vom Literaturwert nur sehr gering ist und wir durch das Hartmann-Interpolationsverfahren die Balmer-Linien sehr gut bestimmen konnten.

Die berechneten Fehler sind wie gesagt statistische Fehler, die durch die mathematische Berechnung entstehen, sie spiegeln aber in unseren Augen nicht die Fehlerhaftigkeit der gefundenen Werte wieder. Das Hartmann Verfahren ist somit auf Grund der dürftigen Dichte der Referenzlinien ungeeignet, die Balmerreihe mit hoher Genauigkeit zu bestimmen.

Die angegebenen Fehler wurden über Fehlerfortpflanzung berechnet. Mit $\Delta d = 0,00005m$ ergibt sich für den Fehler von R und von den 3 Hartmann-Parametern:

$$\Delta R = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_1 - d_3)^2}{(d_1 - d_2)^4}} \cdot \Delta d$$

$$\Delta C = \sqrt{\frac{(R^2 + 1) \Delta d^2 + (d_3 - d_1)^2 \Delta R^2}{(R - 1)^2}}$$

$$\Delta B = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \sqrt{\frac{(2C - d_1 - d_2)^2}{(d_2 - d_1)^2} \Delta C^2 + \frac{(C - d_2)^8 + (C - d_1)^4}{(d_2 - d_1)^4} \Delta d^2}$$

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{1}{C - d} \Delta B\right)^2 + \left(\frac{B}{(C - d)^2} \Delta C\right)^2 + \left(\frac{B}{(C - d)^2} \Delta d\right)^2}$$

Der Fehler für die berechnete Wellenlänge ergibt sich zu

$$\Delta \lambda = \sqrt{\Delta A^2 + \frac{\Delta B^2}{(C - d)^2} + \frac{B^2}{(C - d)^4} (\Delta C^2 + \Delta d^2)}$$

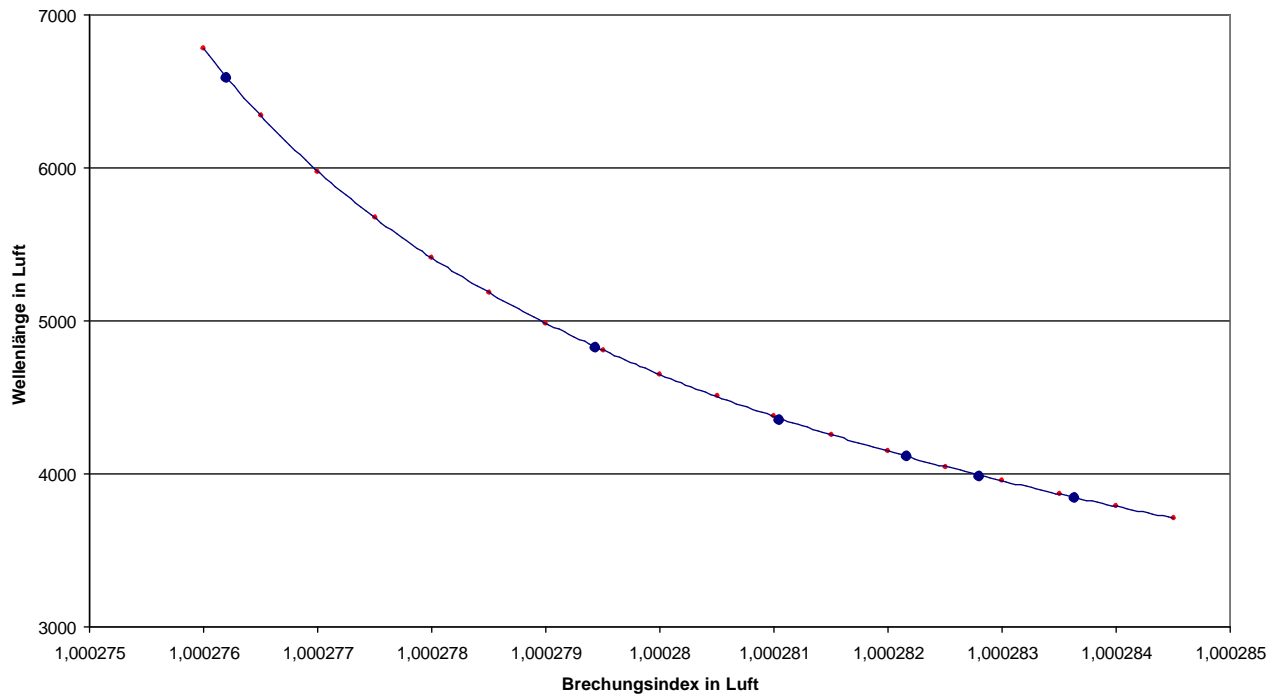
3.5. Bestimmung der Rydbergkonstanten

Wie in der Theorie beschrieben, können die Energieunterschiede zwischen zwei Zuständen und damit die Energie der Photonen berechnet werden. Über die Rydberg-Formel erhalten wir die Wellenlängen der ausgesendeten Photonen. In unserem Fall interessieren uns nur die Photonen, die durch Übergänge auf $n' = 2$ entstehen, wir erhalten somit die Balmer-Formel:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{mit } n \text{ ganzzahlig}$$

Die Wellenlängen, die wir gemessen bzw. berechnet haben, sind durch den Übergang in Luft verändert. Der Wert für λ_{Vakuum} ergibt sich durch Multiplikation mit dem zu jeder Wellenlänge gehörenden Brechungsindex. Durch die in der Versuchsbeschreibung angegebenen Werte für n_{Luft} und λ_{Luft} haben wir eine Fitkurve gelegt und dann mittels eines schnellen graphischen Verfahrens die zu den Balmer-Werten gehörenden Brechungsindizes gefunden.

Verhalten der Brechungsindizes



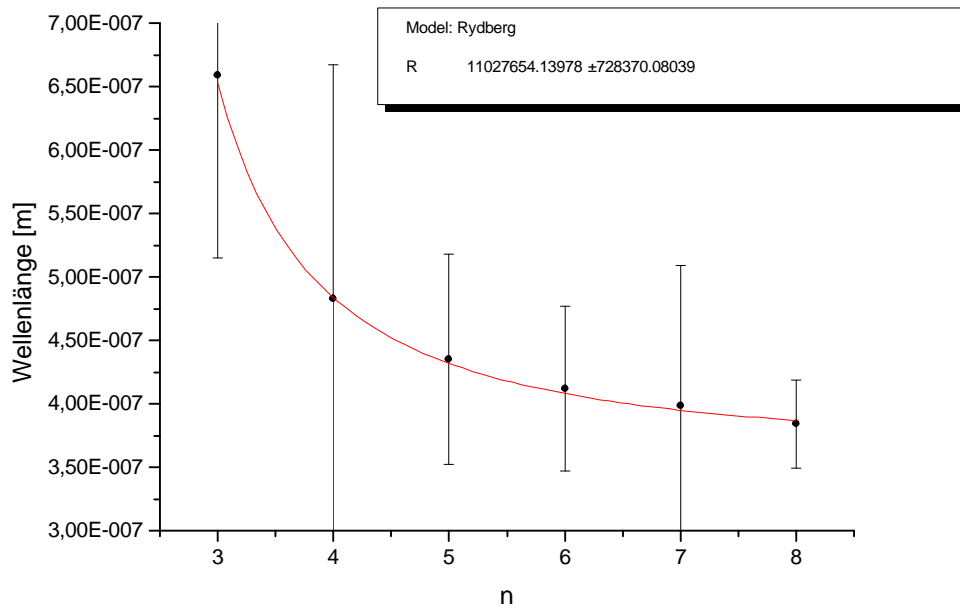
In der folgenden Tabelle sind zu jeder von uns berechneten Balmerlinie die korrigierten Werte mit Fehler angegeben:

$\lambda_{Hartmann}$	n_{Luft}	λ_{vac}	$\Delta\lambda_{vac}$	n_{Ryd}
659,00	1,00027620	659,18	144,10	3
482,56	1,00027943	482,70	184,40	4
434,84	1,00028105	434,96	82,65	5
411,78	1,00028216	411,89	65,14	6
398,14	1,00028280	398,26	110,68	7
384,14	1,00028363	384,25	34,63	8

Um die Rydbergkonstante zu erhalten, plotten wir diese Daten als Funktion $\lambda(n_{Ryd})$. Mit Origin fitten wir folgende Funktion

$$\lambda = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

an die Werte und erhalten



Die Rydbergkonstante wurde hier in einer ersten Auswertung über einen gewichteten Fit gefunden, durch die großen Fehler (bedingt durch die Interpolation) ergeben sich hier auch große Fehler bei der Rydbergkonstanten.

$$R_H = (1,10276 \pm 0,07283) * 10^7 m^{-1}$$

Da wir aber wissen, dass unsere gefundenen Werte für die Balmer-Linien sehr gut mit den Literaturwerten übereinstimmen, haben wir noch einen ungewichteten Fit ausführen lassen, bei dem alle Werte gleich stark in die Berechnung eingehen. Dabei ergibt sich:

$$R_H = (1,09708 \pm 0,00293) * 10^7 m^{-1}$$

Da die Fehler für uns nicht aussagekräftig erscheinen, empfinden wir die zweite Auswertung als physikalisch sinnvoller, da beim gewichteten Fit solche Werte mit geringem Fehler bevorzugt werden und daher der errechnete Fit in unserem Fall *ungenauer* ist.

Der Literaturwert für die Rydbergkonstante ist mit

$$R_{H, Literatur} = 1.097373 * 10^7 m^{-1}$$

angegeben, damit diesen Wert sehr genau bestimmen können. Die prozentuelle Abweichung beträgt weniger als 0,27 Promille.

3.6. Bestimmung des Auflösungsvermögen

Im letzte Arbeitsschritt soll das Auflösungsvermögen des Spektrometers bestimmt werden und mit der tatsächlichen Auflösbarkeit der Linien auf dem Photo verglichen werden.

Das Auflösungsvermögen des Prismas lässt sich über

$$A = B \frac{dn}{d\lambda}$$

bestimmen. Nimmt man zum Beispiel für die Dispersion in Luft den für den sichtbaren Wellenlängenbereich plausiblen Wert von

$$\frac{dn}{d\lambda} = 3 \cdot 10^{-4} \text{nm}^{-1}$$

an (Quelle: www.stilli.de) und verwendet für das Prisma als ausgeleuchtete Basisbreite $B = 6.5\text{cm}$, so ergibt sich für das Prisma selbst ein theoretisches Auflösungsvermögen von

$$A = 19500$$

Dies ist natürlich nicht das Auflösungsvermögen der Gesamtapparatur, z.B. verursacht die verwendete Optik starke Fehler, die nur bedingt durch die verstellbare Bildebene kompensiert werden können. Außerdem wird die Auflösung durch die Linienverbreiterung und Beugungseffekte verschlechtert.

Für die Analyse des tatsächlichen Auflösungsvermögen auf dem Photo, verwenden wir Linienpaare, die wir getrennt erkennen können. Daraus berechnen wir (wie bereits in der Theorie angegeben) das Auflösungsvermögen über

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Dies ist natürlich nur sehr vage möglich, da die Auswahl von Linienpaaren sehr beschränkt ist. Es ist definitiv nicht möglich, eine Abhängigkeit des Auflösungsvermögen von der Wellenlänge zu finden. Wir können nur die beste Auflösung auf dem Photo angeben, die sich durch unsere Linienpaar ergeben.

Wir haben in der folgenden Tabelle Linienpaare angegeben, bei der wir die Linien gerade *nicht* mehr auflösen können, somit erhalten wir brauchbarere Werte als durch Linienpaare, die sehr weit auseinander liegen. Auf jeden Fall erhalten wir dadurch eine obere Grenze des Auflösungsvermögen.

Linie 1 [nm]	Linie 2 [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]	$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$
404,6	407,7	31	131,516
576,9	579,0	21	275,714
365,0	366,3	13	281,769
433,9	435,8	19	229,368

Die tatsächliche Auflösung ist also viel schlechter als die als theoretisch berechnete.

3.7. Zusammenfassung und Diskussion

Abschließend können wir noch sagen, dass wir Glück hatten, dass eines unserer drei Photos so gut gelungen ist, und darauf scharfe Linien zu erkennen waren. Die anderen beiden waren zur Auswertung nicht zu gebrauchen. Da der optische Aufbau verschlossen blieb, konnten wir hierfür keine Ursache finden.

Die weitaus größten Teil unserer Arbeit haben wir in die Auswertung der Eichspektren (die Zuordnung der Linien) stecken müssen. Die mangelnde Angabe der Empfindlichkeitsverteilung des Filmes hat uns einige Stunden gekostet. Um eine gleichmäßige Fitkurve zu erhalten, mussten einige schwache Linien nahezu geraten werden.

Die Bestimmung der Balmerlinien verlief dann unproblematisch. Das Hartmann- Verfahren hat gut funktioniert, die entstandenen Fehler waren auf Grund der zum Teil großen Abstände zwischen zu bestimmender und Referenz- Linien sehr groß.

Linie	$\lambda_{Lit.wert}$ [nm]	$\lambda_{graphisch}$ [nm]	$\Delta\lambda$ [%]	$\lambda_{rechnerisch,vac}$ [nm]	$\Delta\lambda$ [%]
α	656,46	654,95	0,23	659,18	0,41
β	486,27	479,50	1,39	482,70	0,73
γ	434,17	430,13	0,93	434,96	0,18
δ	410,29	407,97	0,57	411,89	0,39
ϵ	397,12	393,21	0,98	398,26	0,29
ζ	389,02	379,92	2,34	384,25	1,23

Man sieht, dass die durch das Hartmann- Verfahren bestimmten rechnerischen Werte auf Grund der lokalen Näherung genauer sind als die graphischen Werte aus der globalen Näherung.

Die Rydbergkonstante konnten wir hieraus extrem genau bestimmen:

$R_{H,Lit.wert}$ [$10^7 m^{-1}$]	$R_{H,gewichtet}$ [$10^7 m^{-1}$]	ΔR_H [%]	$R_{H,ungewichtet}$ [$10^7 m^{-1}$]	ΔR_H [%]
1,097373	1,102765	0,4914	1,097077	0,0270

Es ist zu sehen, dass der Wert aus dem ungewichteten Fit ein deutlich besseres Ergebnis liefert und damit unsere Meinung bzgl. der geringen physikalischen Wertigkeit der Fehler bestätigt.

Zum Schluss wurde aus den Messdaten noch das Auflösungsvermögen geschätzt und es war wie zu erwarten geringer als das theoretisch Erreichbare. Das maximal denkbare tatsächliche Auflösungsvermögen liegt bei $A = 281,769$, im Vergleich dazu liegt der theoretische Wert bei $A = 19500$.

Was in diesem Protokoll noch nicht erwähnt wurde, war die eigenhändige Entwicklung des Photos. Es war sehr lehrreich, den Umgang mit Fixierer und Entwickler selber zu üben. Auch das Hantieren mit dem Film in völliger Dunkelheit hat den Versuchsablauf sehr interessant gemacht und zwischendurch aufgelockert. Das Ablesen der Linienabstände mit Hilfe des Komparators hat uns Einsicht in die wissenschaftliche Arbeitsweise der Vergangenheit verschafft, und die optische Physik mit Leben gefüllt. Dass wir darüber hinaus auch noch sehr genaue Werte haben messen können, hat uns auf Grund des simplen Versuchsaufbaus positiv überrascht.