

β - Spektrometer

Experiment K123 — 27.04.2005
John Bieling and Andreas Orth*

Zusammenfassung. Wir bestimmen in diesem Versuch das Energiespektrum des β -Zerfalls verschiedener radioaktiver Quellen. Daraus bestimmen wir die Maximalenergien, die bei diesen Zerfällen frei werden.

*john.bieling@jobisoft.de und andyorth@web.de

Contents

1. Theorie **3**
1.1. Die β -Zerfälle 3
1.2. Die Fermi- Funktion 4
1.3. Der Kurie- Plot 4

2. Versuchsaufbau **5**

3. Versuchsdurchführung **6**
3.1. Eichung der Hallsonde 6
3.2. Eichung des Spektrometers 7
3.3. Messung der unbekanntten Spektren . . . 12

4. Zusammenfassung **16**

Literatur

H.Haken, H.C.Wolf: Atom- und Quantenphysik,
Springer Verlag

P.A.Tipler: Physik, Spektrum Lehrbuch

Versuchsbeschreibung

sowie die Protokolle anderer Studenten und das Inter-
net.

Layout (.sty-file für L^AT_EX 2_ε) by NORBERT
STUHRMANN, 2003.

1. Theorie

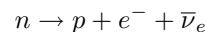
1.1. Die β -Zerfälle

Viele Elemente sind auf Grund der Nukleonenkonfiguration ihrer Kerne instabil. Sie können in andere Atome zerfallen, wenn die Bindungsenergien der entstehenden Kerne (auch Tochterkerne genannt) größer sind als die der Mutterkerne, und wenn zusätzlich die dadurch frei werdende Energie ausreicht, um die nötige Prozessenergie aufzubringen. Rechnerisch lässt sich dies aus den Atommassen bestimmen, da diese um die Bindungsenergie geringer ausfallen als die Summe der Massen der Bestandteile. Zu beachten ist hierbei, dass man unter der Atommasse immer die Masse eines elektrisch neutralen Atoms meint, bei dem also die Anzahl der Protonen gleich der Anzahl der Elektronen ist.

Man unterscheidet bei radioaktiven Zerfällen verschiedene Zerfallsarten. Der hier untersuchte β -Zerfall ist ein Kernzerfall, bei dem sich die Kernladungszahl Z um ± 1 ändert, während die Nukleonenzahl konstant bleibt. Es wird also ein Nukleon vom Proton zum Neutron oder umgekehrt, je nachdem, was energetisch günstiger ist. Man unterscheidet drei Möglichkeiten:

1.1.1. Der β^- -Zerfall

Ein Neutron zerfällt in ein Proton, wobei auf Grund der Erhaltungssätze zusätzlich ein Elektron und ein Antineutrino erzeugt werden:

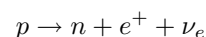


Dieser Zerfall ist nur möglich, wenn die Masse des Mutteratoms größer ist als die Masse des Tochteratoms. Eigentlich entsteht ein einfach ionisierter Kern und ein freies Elektron, die Bindungsenergie des Elektrons ist jedoch zu vernachlässigen, ebenso wie die Masse des Neutrinos.

Die freiwerdende Energie verteilt sich auf das Neutrino und das Elektron, der vergleichsweise schwere Kern nimmt aus Impulserhaltungsgründen kaum Energie auf.

1.1.2. Der β^+ -Zerfall

Der umgekehrte Fall, ein Proton zerfällt in ein Neutron, ein Positron und ein Neutrino:

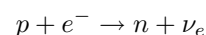


Es entsteht bei diesem Zerfall ein einfach negativ geladenes Atom, es muss also die Masse des Mutteratoms größer sein als die Summe aus der Tochterkernmasse plus zweimal die Elektronenmasse.

Auch hier verteilt sich die Energie auf das Elektron und das Neutrino.

1.1.3. Electron Capture

Beim Elektroneneinfang wird ein atomeigenes Elektron von einem Proton in Kern eingefangen, und wird zu einem Neutron und einem Neutrino:



Dieser Zerfall unterscheidet sich von den beiden oberen in mehrerer Hinsicht.

Zum einen wird kein geladenes Teilchen emittiert, sondern nur ein Neutrino. Neutrinos besitzen keine Ladung, kaum Masse und sind daher nur über die schwache Wechselwirkung nachweisbar. Daher blieben sie auch lange Zeit nur theoretisch postuliert, bevor sie experimentell nachgewiesen werden konnten. Wir können diesen Zerfall also nur indirekt nachweisen, wenn durch ihn ein angeregter Tochterkern entsteht, dessen Anregungsenergie wir messen können. Dazu später mehr.

Auch beim EC wird ein Proton zu einem Neutron. Daher stellt dieser Prozess einen Konkurrenzprozess zum β^+ -Zerfall dar. Die Masse des Tochteratoms muss jedoch nur einfach kleiner sein als die des Mutteratoms. Ist die Massendifferenz der beiden Atome sehr klein, so kann es Elemente geben, die nur über EC zerfallen können, weil der β^+ -Zerfall energetisch nicht möglich ist. Bei höheren Massendifferenzen steigt jedoch die Zerfallswahrscheinlichkeit für Positronenemission, diese überwiegt dann gegenüber EC.

1.2. Die Fermi- Funktion

Da der Atomkern nur aus Neutronen und Protonen besteht, kann das Elektron bzw. Positron, das beim β -Zerfall emittiert wird, nicht aus dem Kern selbst stammen, sondern muss erst durch die Neutron-Proton-Umwandlung erzeugt werden. Aufgrund dieser Erkenntnis hat Fermi mit Hilfe der Störungstheorie die β -Übergangswahrscheinlichkeit vom Anfangszustand i in den Endzustand f angegeben:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \frac{dn}{dE_0}$$

Hierbei ist $|H_{if}|$ das Matrixelement der Wechselwirkung des Anfangs- und Endzustandes, E_0 ist die frei werdende Zerfallsenergie, und dn/dE_0 die Dichte der Endzustände im Energie- Intervall dE_0 .

Diese Übergangswahrscheinlichkeit äussert sich im Experiment durch die Wahrscheinlichkeit, Teilchen pro Zeiteinheit mit einem Impuls aus diesem Intervall zu detektieren. Berechnungen der genauen Wechselwirkung führen schließlich auf die Formel:

$$N(p)dp = C \cdot p^2 \cdot (E_0 - E)^2 dp$$

Hierbei ist jedoch noch nicht der Wechselwirkung mit dem Kern *nach* der Erzeugung berücksichtigt worden. Ein Elektron wird nach der Produktion vom Kern angezogen, also abgebremst, ein Positron hingegen vom Kern weg beschleunigt. Dies führt zu einem weiteren Korrekturterm, welcher von der Kernladung, und der Energie des Teilchens abhängt. Man erhält schließlich:

$$N(p)dp = C \cdot F(Z; E) \cdot p^2 \cdot (E_0 - E)^2 dp$$

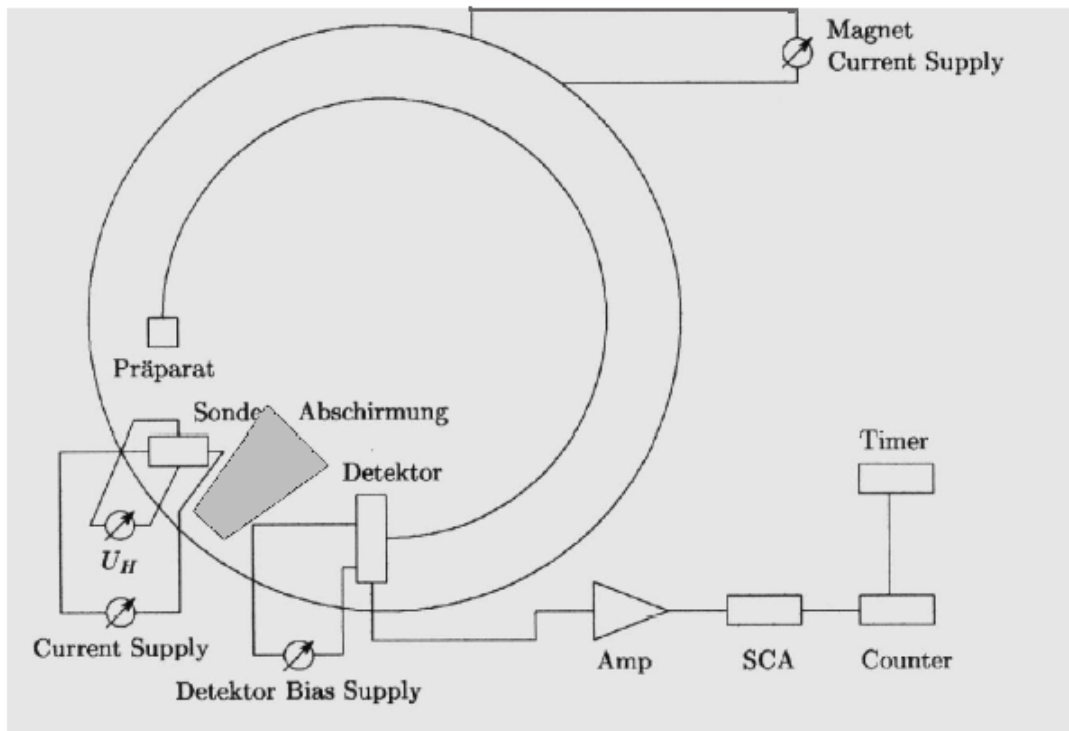
1.3. Der Kurie- Plot

Es ist für die Kernphysik von großem Interesse, die frei werdende Energie E_0 zu bestimmen. Aus der obigen Formel geht jedoch hervor, dass die Emissionswahrscheinlichkeit von Teilchen mit maximaler kinetischer Energie gegen null geht. Daher ist es hilfreich, die Formel ein wenig umzustellen:

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z; E)}} = C' \cdot (E_0 - E)$$

Die erhaltene Funktion ist eine Gerade. An der Nullstelle dieser Funktion kann die maximale Energie E_0 abgelesen werden.

2. Versuchsaufbau



Unsere Proben befinden sich in einer Halterung in einem doppeltfokussierenden Spektrometer. Darin werden die emittierten geladenen Teilchen in einem variablen Magnetfeld auf eine Kreisbahn gelenkt. Der Detektor ist in einem Winkel von $\sqrt{2}\pi$ zur Probe im Spektrometer montiert. Man kann zeigen, dass bei dieser Anordnung möglichst viele breit gestreute Teilchen registriert werden.

Probe und Detektor sind durch Blei voneinander getrennt, um gewährleisten zu können, dass wir nur β -Teilchen detektieren, die zuvor auf dem Kreisbogen durch das Spektrometer gelaufen sind. Die Stärke des Magnetfeldes wird mit einer Hall-Sonde gemessen. Wir werden im Laufe des Experiments ausschließlich die Spannungen messen, welche uns die Hall-Sonde liefert und die Anzahl der von Detektor registrierten β -Teilchen.

Die Hall-Sonde liefert konstruktionsbedingt auch ohne externes Magnetfeld eine Spannung, daher müssen wir unsere Messung um diese Spannungen korrigieren. Wir messen im ersten Teil unseres Versuch die Offsetspannung der Hallsonde.

Das Spektrometer ist während der Messungen bis auf einen Druck unter 10^{-3} Torr evakuiert.

3. Versuchsdurchführung

3.1. Eichung der Hallsonde

Wir erwarten theoretisch, dass die Hallsonde, mit deren Hilfe die Magnetfeldstärke bestimmt wird soll, eine Spannung U_{Hall} anzeigt, welche direkt proportional zum Magnetfeld ist. Da dies nicht der Fall ist, muss eine Nullpunktseichung der Sonde vorgenommen werden.

Die Hall-Spannung besitzt einen Offset-Wert U_{off} . Dieser wird ermittelt, indem wir die oberen und unteren Remanenzfelder messen. Der Mittelwert dieser beiden Messwerte ergibt unseren theoretischen Nullpunkt.

Messung	U_{oben} [Skt]	U_{unten} [Skt]
1	9,00	4,20
2	8,80	4,20
3	8,80	4,30
4	8,80	4,20
5	8,80	4,20
Mittelwert [Skt]	8,84	4,22
Fehler [Skt]	0,036	0,018

Aus diesen Werten erhalten wir für die Nullpunktspannung einen Wert von $U_{off} = 4.62 \pm 0.04$ V.

Die Fehler der Werte in der Tabelle sind die Standardabweichungen, der Fehler der Nullpunktspannung folgt aus:

$$U_{off} = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

$$\Delta U_{off} = \sqrt{(\Delta U_1/2)^2 + (\Delta U_2/2)^2}$$

3.2. Eichung des Spektrometers

3.2.1. Messung des Untergrunds Cs^{137}

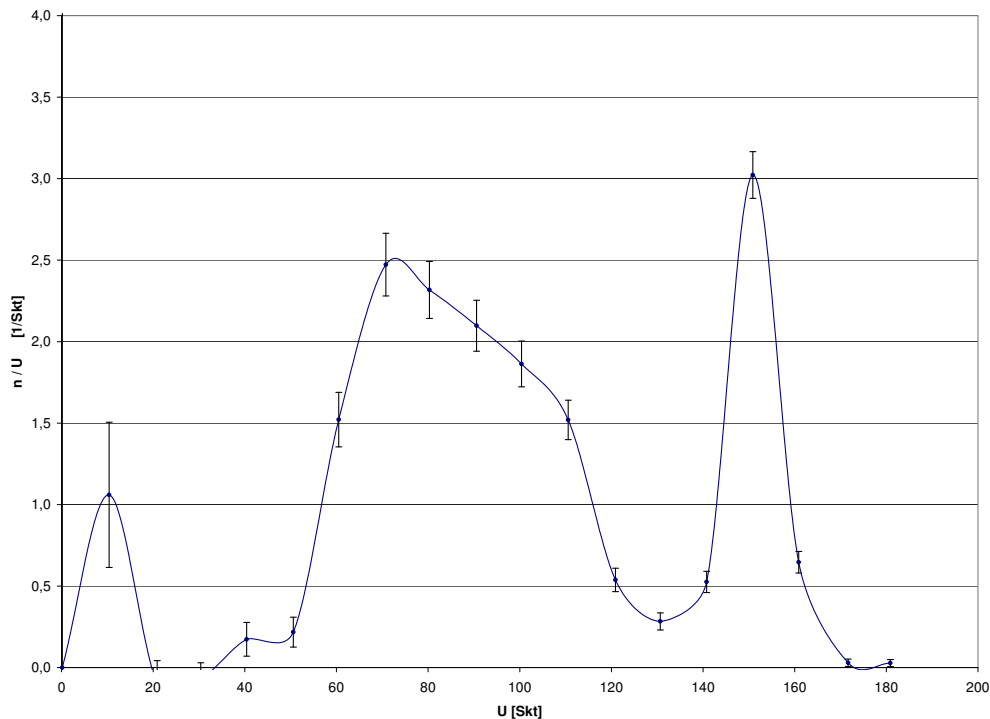
Zur Eichung des Spektrums verwenden wir das Cäsium- Spektrum, da dieses sich durch deutliche Konversionslinien auszeichnet. Wir messen den Untergrund für die Transmissionen von 1%, 2% und 4% bei einer Messzeit von 100 Sekunden. Natürlich ist zur Untergrundmessung das Magnetfeld ausgeschaltet.

Messung	4%	2%	1%
1	28	31	29
2	22	27	21
3	23	25	23
Mittelwert [Skt]	24	28	24
Fehler [Skt]	1,53	2,56	1,97
auf 40s	10	11	10
Fehler [Skt]	0,61	1,02	0,79

3.2.2. Messung des Spektrums Cs^{137}

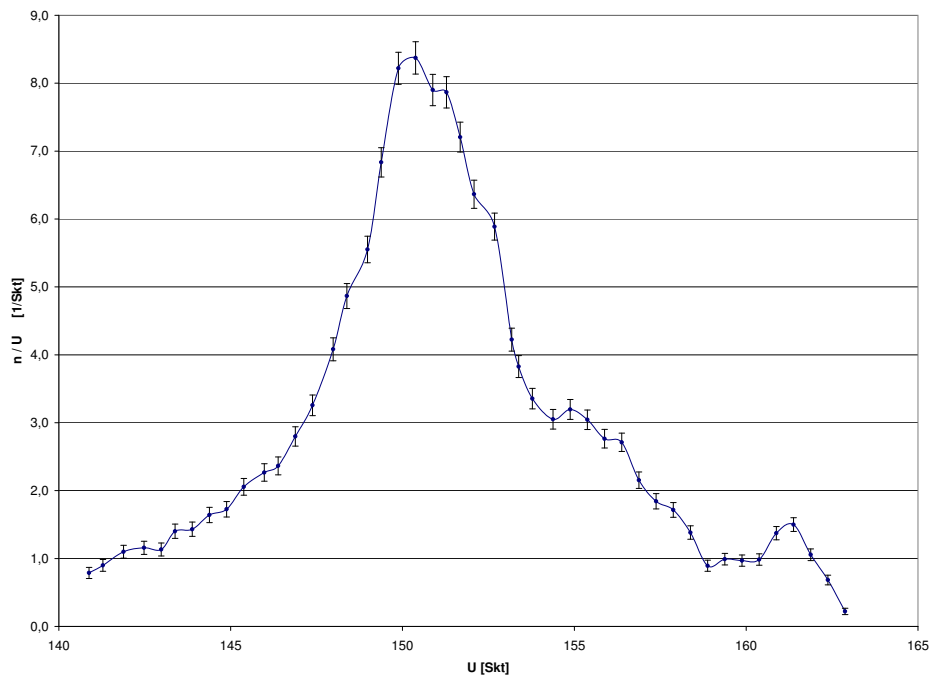
Nun können wir das Spektrum des Cäsiums vermessen. Dazu durchfahren wir den gesamten Impulsbereich zunächst einmal grob, um die ungefähre Lage der Konversionslinien zu erhalten. Die einzelnen Messdaten sind am Ende des Protokolls angefügt.

Grobe Messung des Cs^{137} bei 4% Transmission, 40s Messzeit

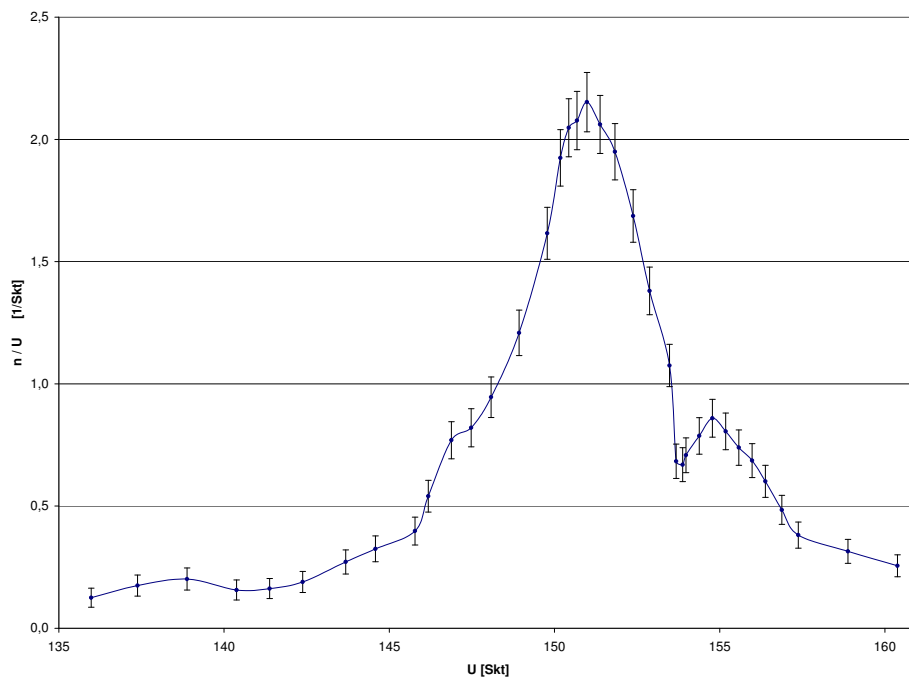


Nun können wir die ungefähre Lage der Peaks erkennen, und eine genaue Messung mit verschiedenen Transmissionen aufnehmen. Wir erhalten die folgenden Graphen:

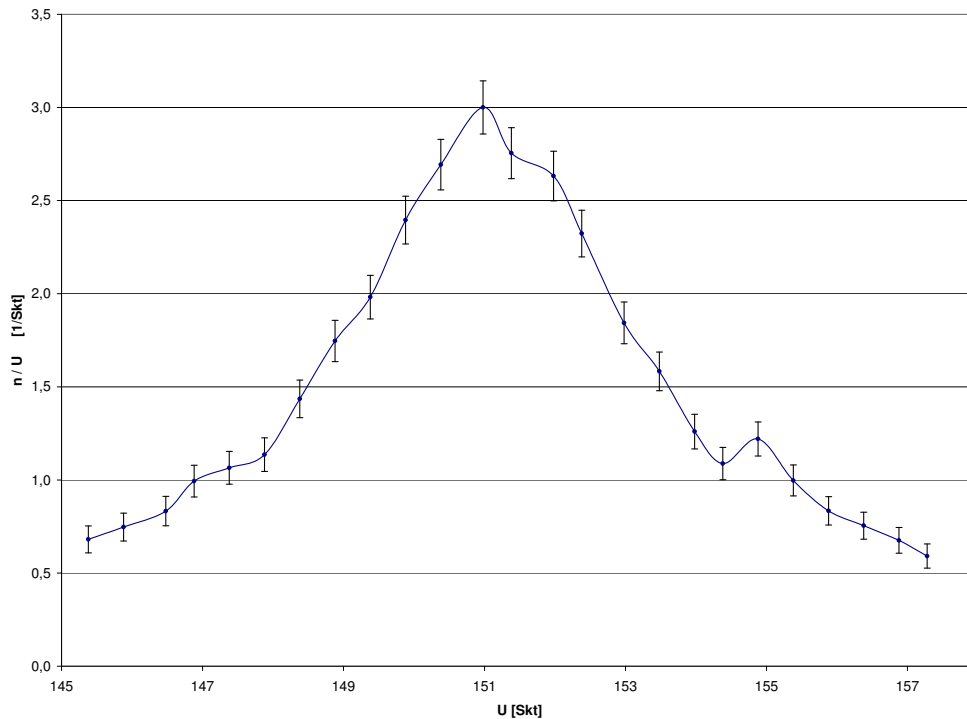
Feinmessung des Cs^{137} bei 1% Transmission, 100s Messzeit



Feinmessung des Cs^{137} bei 2% Transmission, 40s Messzeit



Feinmessung des Cs^{137} bei 4% Transmission, 40s Messzeit



Wie den Tabellen zu entnehmen ist, haben wir mehrere Korrektur- und Fehlerrechnungen vornehmen müssen. Die gemessenen Spannungen mussten um die Offset- Spannung korrigiert werden und die Zählraten wurden vom Untergrund bereinigt. Dann wurden die neu erhaltenen Werte durch die korrigierte Spannung geteilt. Dies ist notwendig, da mit zunehmender Spannung auch das betrachtete Impulsintervall steigt. Dadurch werden bei höheren Magnetspannungen automatisch höhere Zählraten erreicht, und dies ist nicht gewünscht. Fehler haben wir nach Gauss berechnet, die Genauigkeit des Spannungsmessgerätes ist durch eine Anzeige von nur einer Stelle nach dem Komma gegeben zu 0,05:

$$U_{korr} =: U_k = U - U_{off} \Rightarrow \Delta U_k = \sqrt{(\Delta U)^2 + (\Delta U_{off})^2} = \sqrt{(0,05)^2 + (0,04)^2} \approx 0,064$$

$$n_k := n - n_0 \Rightarrow \Delta n_k = \sqrt{(\Delta n_0)^2 + (\Delta n)^2}$$

$$n_{rel} = n_k / U_k \Rightarrow \Delta n_{rel} = \sqrt{(1/U_k \cdot \Delta n_k)^2 + (n_k / U_k^2 \cdot \Delta U_k)^2}$$

3.2.3. Eichung des Spektrometers

Wir eichen das Spektrometer in der üblichen Einheit $B\rho$. Die Berechnung erfolgt über die kinetischen Energien der beobachteten Elektronen.

Zunächst sehen wir zwei Linien in jedem Diagramm. Dies sind die Konversionslinien der K- und L-Schalen Elektronen.

	1% [Skt]	2%	4%	Mittel	σ
K-Linie	150,38	150,98	150,98	150,780	0,163
L-Linie	154,88	154,78	154,88	154,847	0,027

Die kinetische Energie ergibt sich aus der Differenz der Gesamt- und der Bindungsenergie:

$$E_{kin} = E_{ges} - E_B$$

wobei E_{ges} die gesamte Energie bezeichnet, die beim Zerfall zur Verfügung steht. Sie beträgt beim Cäsium-Zerfall 661,66 keV.

Die Bindungsenergien sind angegeben, allerdings ist die L-Schale in drei Unterschalen geteilt, so dass wir eine Überlagerung dreier Linien messen. Wir bilden einen nach den Multiplizitäten gewichteten Mittelwert:

$$E_L := \frac{2 \cdot E_{L1} + 2 \cdot E_{L2} + 4 \cdot E_{L3}}{2 + 4 + 2} \approx 5,5526 \text{ keV}$$

Nun berechnen wir aus der kinetischen Energie die zugehörigen $B\rho$ Werte. Aus der Gleichheit von Flieh- und Lorentzkraft folgt mit ein wenig Relativistik:

$$m \cdot v^2 / r = e \cdot v \cdot B \Leftrightarrow B \cdot r = \frac{m \cdot v}{e} = p/e$$

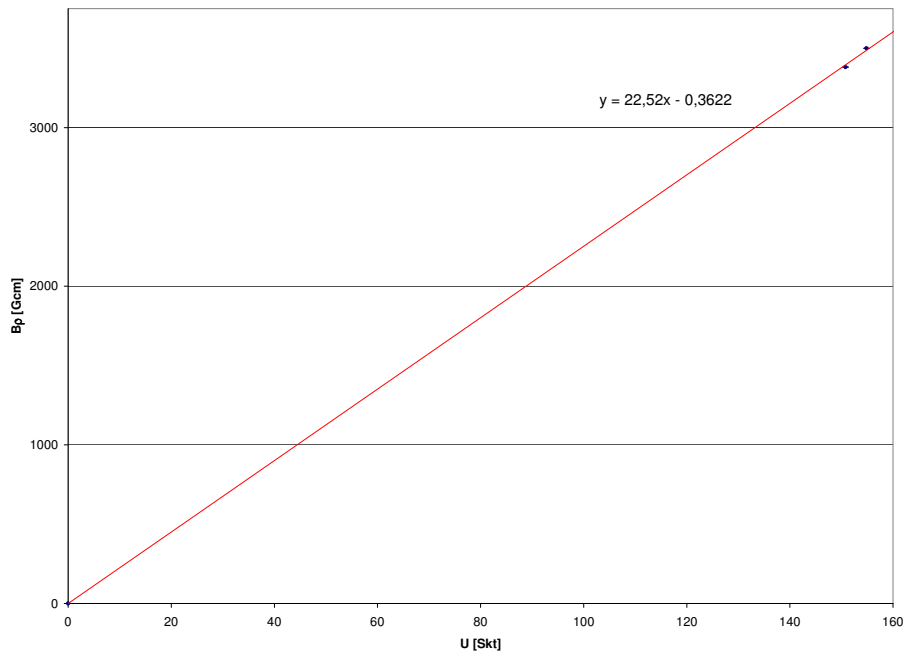
$$B\rho = \frac{1}{ec} \sqrt{E_{kin}^2 + 2 \cdot E_{kin} \cdot m_0 c^2}$$

Hier die Ergebnisse dieser Rechnung:

Linie	E_B [keV]		E_{kin}	$B\rho$ [Gcm]
K	37,441		624,219	3381,3614
L ₁	5,987			
L ₂	5,624	$\Rightarrow E_L =$	656,134	3500,1670
L ₃	5,247			

Und da die Werte $B\rho$ proportional zu U_k sind, können wir eine Gerade anfitten, um die endgültige Eichung zu erhalten. Ein weiterer Punkt der Geraden ist natürlich der Ursprung, da ohne Spannung auch kein Feld anliegt:

Eichung des Spektrometers



Wir erhalten die Eichgleichung $U_k \mapsto B\rho$:

$$B\rho = m \cdot x + b = (22,51966 \pm 0,15425)Gcm/Skt \cdot U_k - (0,36219 \pm 19,24785)Gcm$$

3.2.4. Bestimmung des Auflösungsvermögens

Wir bestimmen jetzt noch rein graphisch das Auflösungsvermögen. Dazu lesen wir an unseren K- Linien die Halbwertsbreiten ab, und teilen diese durch den Peakwert. Wir erhalten die folgende Tabelle. Ein Fehler kann hier nicht genau angegeben werden, wir tippen auf mindestens 5%, da das Ablesen von Hand sehr ungenau ist.

Trs.	U_{max}	ΔU	A	A [%]
1%	150,38	5,08	0,0338	3,38%
2%	150,98	4,95	0,0328	3,28%
4%	150,98	5,10	0,0338	3,38%

3.3. Messung der unbekanntenen Spektren

3.3.1. Messung des Untergrunds Na^{22} und Tl^{204}

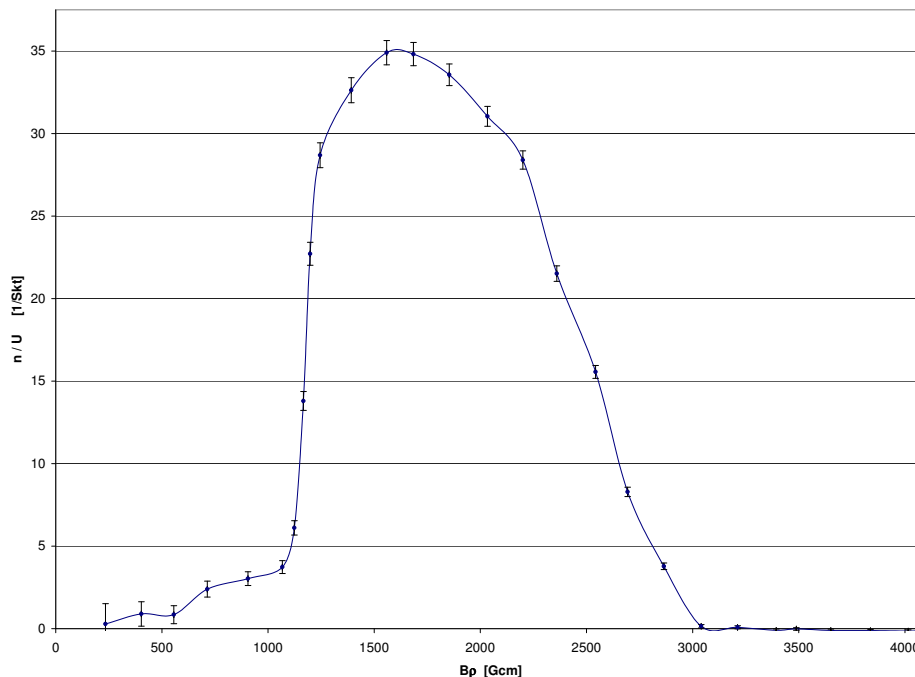
Wir gehen genauso vor wie bei der Cesium- Messung, nur dass wir nun ein geeichtes Spektrometer haben. Zunächst messen wir den Untergrund bei einer Transmission von 4% für eine Dauer von 40 Sekunden:

Messung	Na^{22}	Tl^{204}
1	384	6
2	405	8
3	392	4
Mittelwert [Skt]	394	6
Fehler [Skt]	5,00	0,94
auf 40s	157	2
Fehler [Skt]	2,00	0,38

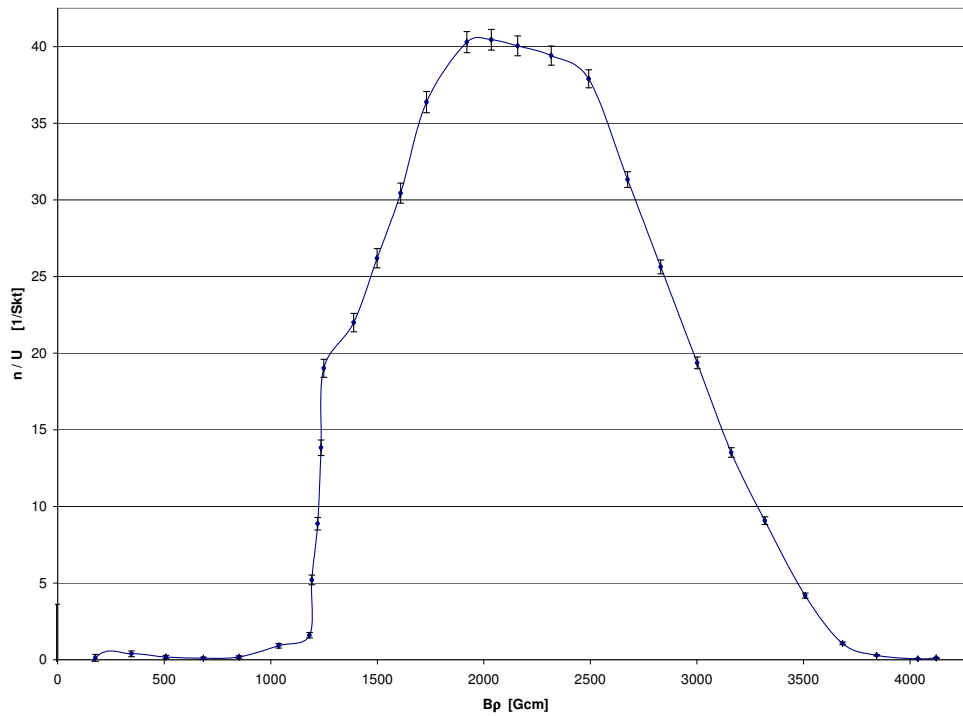
3.3.2. Messung der Spektren Na^{22} und Tl^{204}

Nun nehmen wir die Spektren der beiden Strahler auf, und können diese um den Untergrund korrigieren, und die Hallspannung auf Null eichen und dann in $B\rho$ umrechnen. Bei der Natriumprobe muss der Magnet umgepolt werden, um die positiv geladenen Positronen zu zählen. Daher wird der Offsetwert hier zu der Spannung hinzu addiert, anstatt subtrahiert. Die genauen Messwerte sind wieder im Anhang zu finden, wir erhalten die folgenden Spektren:

Spektrum des Na^{22} bei 4% Transmission, 40s Messzeit



Spektrum des Tl^{204} bei 4% Transmission, 40s Messzeit



Wir wollen einen Kurie- Plot dieser Daten erstellen, um die maximale Energie der Zerfälle zu bestimmen. Dazu rechnen wir Impulse und Energien in einheitenlose Größen um:

$$\eta := \frac{p}{m_0c} = B\rho \cdot \frac{e}{m_0c} \approx B\rho \cdot \frac{1}{1705 \text{ Gcm}}$$

$$\Delta\eta = \Delta(B\rho) \cdot \frac{1}{1705 \text{ Gcm}}$$

$$\epsilon := \frac{E_0 + E_{kin}}{E_0} = 1 + \frac{E_{kin}}{m_0c^2} = \sqrt{1 + \eta^2}$$

$$\Delta\epsilon = \frac{\eta}{\epsilon} \cdot \Delta\eta$$

Wir können damit unsere Formel für den Kurie- Plot umstellen zu:

$$Y := \sqrt{\frac{n_{rel}}{F(\epsilon, Z)\eta\epsilon}} = const \cdot (\epsilon - \epsilon_0)$$

$$\Delta Y = \Delta(\sqrt{\dots}) = \sqrt{\left(\Delta n_{rel} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_{rel}F\eta\epsilon}}\right)^2 + \left(\Delta\epsilon \cdot \sqrt{\frac{n_{rel}}{4F\eta\epsilon^3}}\right)^2 + \left(\Delta\eta \cdot \sqrt{\frac{n_{rel}}{4F\eta^3\epsilon}}\right)^2}$$

Wir tragen nun ϵ auf der Abszisse auf, und Y auf der Ordinate. Die Nullstelle liefert uns ϵ_0 .

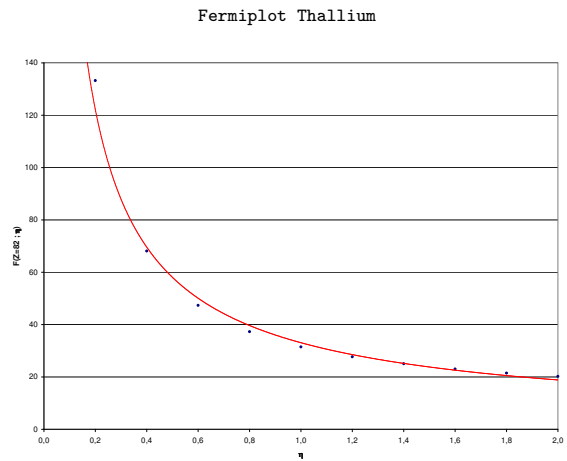
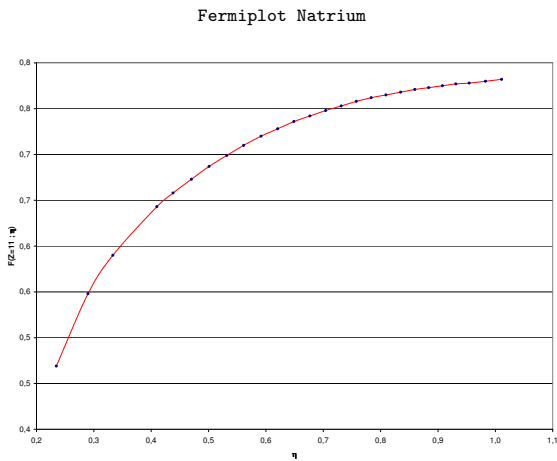
Zunächst müssen wir noch die beiden Fermifunktionen approximieren. Für das Thallium nehmen wir die in der Versuchsbeschreibung angegebenen Werte. Zur Bestimmung der Fermifunktion von Natrium fitten wir den Graphen aus RIEZLER, KOPITZKI anhand einiger Stützpunkte. Wir rechnen diese dann noch von ϵ in η um.

Wir setzen eine Exponentialfunktion an und erhalten für Natrium die Parameter:

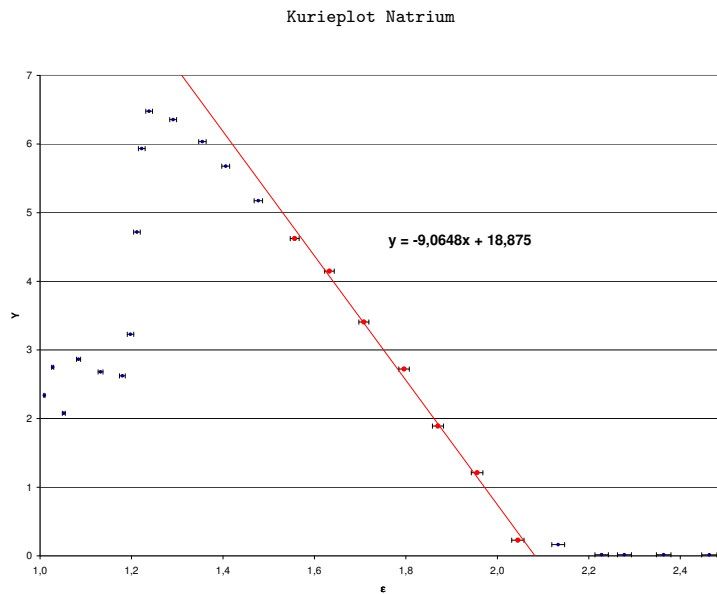
$$F(Z = 11; \eta) = \frac{0,784}{1 + 2,309 \cdot e^{-5,614x}}$$

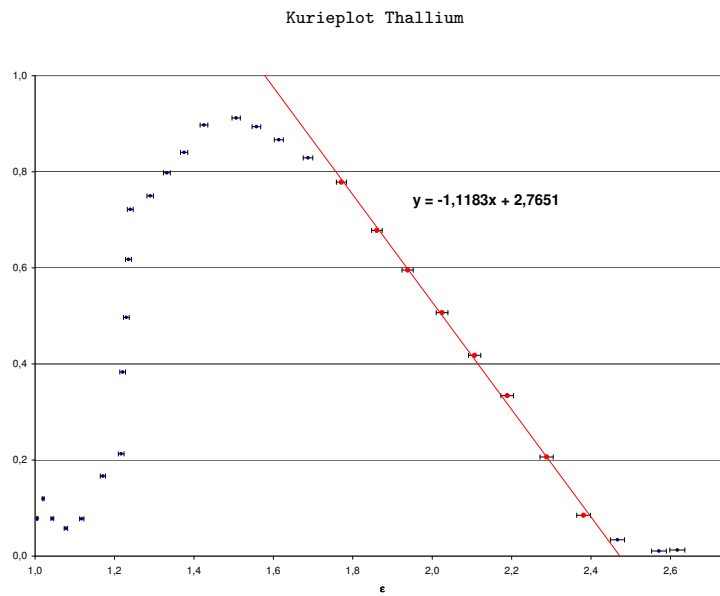
Die Werte für Thallium ergeben eine einfachere Potenz- Funktion:

$$F(Z = 82; \eta) = 33,085 \cdot \eta^{-0,8116}$$



Endlich können wir die Kurieplots der beiden Proben erstellen.





Die Geradengleichungen $m \cdot \epsilon_0 + b$ liefern uns die erwarteten Nullstellen, nämlich für Natrium bei:

$$\epsilon_0 = -\frac{b}{m} = \frac{18,875}{9,065} = 2,0822$$

$$\Delta\epsilon_0 = \sqrt{(\Delta b/m)^2 + (b\Delta m/m^2)^2} \approx 0,0767$$

$$E_0 = (\epsilon_0 - 1) \cdot 511 \text{keV} \approx (553,020 \pm 39,175) \text{keV}$$

und für Thallium bei:

$$\epsilon_0 = -\frac{b}{m} = \frac{2,7651}{1,1183} = 2,4726$$

$$\Delta\epsilon_0 = \sqrt{(\Delta b/m)^2 + (b\Delta m/m^2)^2} \approx 0,0274$$

$$E_0 = (\epsilon_0 - 1) \cdot 511 \text{keV} \approx (752,495 \pm 13,997) \text{keV}$$

Die Literaturwerte betragen 545,7 keV bzw. 763,7 keV und liegen damit sehr nah an unseren Werten. Es ist eigentlich zu erwarten, dass wir eher zu kleine Werte messen, welche durch Energieverluste entstehen, zum Beispiel durch eine unvollständige Evakuierung des Spektrometers.

4. Zusammenfassung

Wir haben zunächst die Hallsonde eichen müssen, und sind dabei auf einen Offset von 4,62 V gekommen.

Dann haben wir das bekannte Spektrum von Cäsium-137 vermessen (zunächst grob, dann fein) bei verschiedenen Transmissionen. Die Lage der bekannten Linienpeaks hat uns eine Eichung des Spektrometers in der üblichen $B\rho$ - Einheit verschafft. (Für ein Linientriplett musste ein gewichteter Mittelwert gebildet werden).

Abschließend haben wir Natrium-22 und Thallium-204 Proben vermessen, und anhand der Kurieplots die dabei frei werdenden Zerfallsenergien bestimmt. Hierbei war eine Approximierung der Fermifunktionen notwendig.

Die Auswertung dieses Versuches hat viel Tabellenkalkulation benötigt, und es mussten einige Graphen geplottet und anschließend gefittet werden. Dies wurde auch konsekutiv verwendet, also das Ergebnis eines Fitts ist in die Werte des nächsten eingegangen. Wir hatten kein mathematisches Handwerkszeug, die Fehler hierbei angemessen fortzupflanzen.

Dennoch ist es uns gelungen, die Maximalenergien präzise zu bestimmen. Hier noch einmal die Ergebnisse.

	Na	Tl
E_{max} [keV]	553,020	752,495
E_{lit} [keV]	545,7	763,7
dev. [%]	1,34	1,47

Grobmessung Cäsium bei 4% Transmission, Messzeit 40s

U [SKT]	U_k [SKT]	n	n_k	Δn_k	n_{rel}	Δn_{rel}
4,8	0,18	10	0	3,2206	0,00	17,8921
15,00	10,38	21	11	4,6230	1,06	0,4454
25,50	20,88	8	0	2,8935	0,00	0,1386
35,00	30,38	8	0	2,8935	0,00	0,0952
45,00	40,38	17	7	4,1680	0,17	0,1032
55,20	50,58	21	11	4,6230	0,22	0,0914
65,10	60,48	102	92	10,1179	1,52	0,1673
75,40	70,78	185	175	13,6151	2,47	0,1924
84,90	80,28	196	186	14,0133	2,32	0,1746
95,20	90,58	200	190	14,1553	2,10	0,1563
105,00	100,38	197	187	14,0489	1,86	0,1400
115,20	110,58	178	168	13,3556	1,52	0,1208
125,50	120,88	75	65	8,6817	0,54	0,0718
135,30	130,68	47	37	6,8827	0,28	0,0527
145,40	140,78	84	74	9,1854	0,53	0,0652
155,50	150,88	466	456	21,5957	3,02	0,1431
165,50	160,88	114	104	10,6945	0,65	0,0665
176,30	171,68	15	5	3,9207	0,03	0,0228
185,50	180,88	15	5	3,9207	0,03	0,0217

Feinmessung Cäsium bei 1% Transmission, Messzeit 100s

U [SKT]	U_k [SKT]	n	n_k	Δn_k	n_{rel}	Δn_{rel}
145,50	140,88	135,00	111,00	11,7848	0,79	0,0837
145,90	141,28	151,00	127,00	12,4451	0,90	0,0881
146,50	141,88	180,00	156,00	13,5603	1,10	0,0956
147,10	142,48	189,00	165,00	13,8882	1,16	0,0975
147,60	142,98	186,00	162,00	13,7797	1,13	0,0964
148,00	143,38	225,00	201,00	15,1288	1,40	0,1055
148,50	143,88	230,00	206,00	15,2932	1,43	0,1063
149,00	144,38	261,00	237,00	16,2752	1,64	0,1127
149,50	144,88	274,00	250,00	16,6698	1,73	0,1151
150,00	145,38	323,00	299,00	18,0798	2,06	0,1244
150,60	145,98	355,00	331,00	18,9442	2,27	0,1298
151,00	146,38	370,00	346,00	19,3360	2,36	0,1321
151,50	146,88	435,00	411,00	20,9495	2,80	0,1426
152,00	147,38	504,00	480,00	22,5362	3,26	0,1529
152,60	147,98	628,00	604,00	25,1372	4,08	0,1699
153,00	148,38	746,00	722,00	27,3840	4,87	0,1846
153,60	148,98	851,00	827,00	29,2383	5,55	0,1963
154,00	149,38	1045,00	1021,00	32,3864	6,83	0,2168
154,50	149,88	1256,00	1232,00	35,4948	8,22	0,2368
155,00	150,38	1283,00	1259,00	35,8731	8,37	0,2386
155,50	150,88	1216,00	1192,00	34,9268	7,90	0,2315
155,90	151,28	1214,00	1190,00	34,8982	7,87	0,2307
156,30	151,68	1117,00	1093,00	33,4796	7,21	0,2207
156,70	152,08	992,00	968,00	31,5576	6,37	0,2075
157,30	152,68	923,00	899,00	30,4447	5,89	0,1994
157,80	153,18	671,00	647,00	25,9785	4,22	0,1696
158,00	153,38	611,00	587,00	24,7968	3,83	0,1617
158,40	153,78	540,00	516,00	23,3213	3,36	0,1517
159,00	154,38	495,00	471,00	22,3356	3,05	0,1447
159,50	154,88	519,00	495,00	22,8666	3,20	0,1476
160,00	155,38	497,00	473,00	22,3804	3,04	0,1440
160,50	155,88	455,00	431,00	21,4215	2,76	0,1374
161,00	156,38	448,00	424,00	21,2575	2,71	0,1359
161,50	156,88	362,00	338,00	19,1280	2,15	0,1219
162,00	157,38	314,00	290,00	17,8292	1,84	0,1133
162,50	157,88	295,00	271,00	17,2882	1,72	0,1095
163,00	158,38	243,00	219,00	15,7124	1,38	0,0992
163,50	158,88	166,00	142,00	13,0338	0,89	0,0820
164,00	159,38	182,00	158,00	13,6338	0,99	0,0855
164,50	159,88	179,00	155,00	13,5233	0,97	0,0846
165,00	160,38	182,00	158,00	13,6338	0,99	0,0850
165,50	160,88	245,00	221,00	15,7760	1,37	0,0981
166,00	161,38	266,00	242,00	16,4281	1,50	0,1018
166,50	161,88	195,00	171,00	14,1025	1,06	0,0871
167,00	162,38	135,00	111,00	11,7848	0,68	0,0726
167,50	162,88	60,00	36,00	7,9926	0,22	0,0491

Feinmessung Cäsium bei 2% Transmission, Messzeit 40s

U [SKT]	U_k [SKT]	n	n_k	Δn_k	n_{rel}	Δn_{rel}
140,60	135,98	28,00	17,00	5,3889	0,13	0,0396
142,00	137,38	35,00	24,00	6,0034	0,17	0,0437
143,50	138,88	39,00	28,00	6,3277	0,20	0,0456
145,00	140,38	33,00	22,00	5,8344	0,16	0,0416
146,00	141,38	34,00	23,00	5,9195	0,16	0,0419
147,00	142,38	38,00	27,00	6,2482	0,19	0,0439
148,30	143,68	50,00	39,00	7,1443	0,27	0,0497
149,20	144,58	58,00	47,00	7,6838	0,33	0,0531
150,40	145,78	69,00	58,00	8,3690	0,40	0,0574
150,80	146,18	90,00	79,00	9,5415	0,54	0,0653
151,50	146,88	124,00	113,00	11,1821	0,77	0,0761
152,10	147,48	132,00	121,00	11,5343	0,82	0,0782
152,70	148,08	151,00	140,00	12,3305	0,95	0,0833
153,55	148,93	191,00	180,00	13,8579	1,21	0,0931
154,40	149,78	253,00	242,00	15,9386	1,62	0,1064
154,80	150,18	300,00	289,00	17,3505	1,92	0,1155
155,05	150,43	319,00	308,00	17,8897	2,05	0,1189
155,30	150,68	324,00	313,00	18,0289	2,08	0,1197
155,60	150,98	336,00	325,00	18,3587	2,15	0,1216
156,00	151,38	323,00	312,00	18,0011	2,06	0,1189
156,45	151,83	307,00	296,00	17,5511	1,95	0,1156
157,00	152,38	268,00	257,00	16,4025	1,69	0,1076
157,50	152,88	222,00	211,00	14,9345	1,38	0,0977
158,10	153,48	176,00	165,00	13,3057	1,08	0,0867
158,30	153,68	116,00	105,00	10,8185	0,68	0,0704
158,50	153,88	114,00	103,00	10,7257	0,67	0,0697
158,60	153,98	120,00	109,00	11,0018	0,71	0,0715
159,00	154,38	132,50	121,50	11,5560	0,79	0,0749
159,40	154,78	144,00	133,00	12,0433	0,86	0,0778
159,80	155,18	136,00	125,00	11,7064	0,81	0,0754
160,20	155,58	126,00	115,00	11,2712	0,74	0,0724
160,60	155,98	118,00	107,00	10,9106	0,69	0,0699
161,00	156,38	105,00	94,00	10,2976	0,60	0,0659
161,50	156,88	87,00	76,00	9,3830	0,48	0,0598
162,00	157,38	71,00	60,00	8,4877	0,38	0,0539
163,50	158,88	61,00	50,00	7,8766	0,31	0,0496
165,00	160,38	52,00	41,00	7,2829	0,26	0,0454

Feinmessung Cäsium bei 4% Transmission, Messzeit 40s

U [SKT]	U_k [SKT]	n	n_k	Δn_k	n_{rel}	Δn_{rel}
150,00	145,38	110,00	99,00	10,5058	0,68	0,0723
150,50	145,88	120,00	109,00	10,9714	0,75	0,0752
151,10	146,48	133,00	122,00	11,5487	0,83	0,0788
151,50	146,88	157,00	146,00	12,5448	0,99	0,0854
152,00	147,38	168,00	157,00	12,9758	1,07	0,0880
152,50	147,88	179,00	168,00	13,3930	1,14	0,0906
153,00	148,38	224,00	213,00	14,9791	1,44	0,1010
153,50	148,88	271,00	260,00	16,4734	1,75	0,1107
154,00	149,38	307,00	296,00	17,5320	1,98	0,1174
154,50	149,88	370,00	359,00	19,2451	2,40	0,1284
155,00	150,38	416,00	405,00	20,4052	2,69	0,1357
155,60	150,98	464,00	453,00	21,5493	3,00	0,1427
156,00	151,38	428,00	417,00	20,6972	2,75	0,1367
156,60	151,98	411,00	400,00	20,2823	2,63	0,1335
157,00	152,38	365,00	354,00	19,1147	2,32	0,1254
157,60	152,98	293,00	282,00	17,1281	1,84	0,1120
158,10	153,48	254,00	243,00	15,9490	1,58	0,1039
158,60	153,98	205,00	194,00	14,3308	1,26	0,0931
159,00	154,38	179,00	168,00	13,3930	1,09	0,0868
159,50	154,88	200,00	189,00	14,1553	1,22	0,0914
160,00	155,38	166,00	155,00	12,8985	1,00	0,0830
160,50	155,88	141,00	130,00	11,8900	0,83	0,0763
161,00	156,38	129,00	118,00	11,3742	0,75	0,0727
161,50	156,88	117,00	106,00	10,8338	0,68	0,0691
161,90	157,28	104,00	93,00	10,2163	0,59	0,0650

Messung Natrium bei 4% Transmission, Messzeit 40s

U [SKT]	U_k [SKT]	$B\rho$ [Gcm]	$\Delta B\rho$ [Gcm]	n	n_k	Δn_k	n_{rel}	Δn_{rel}
-5,80	10,42	234,30	19,32	160	3	12,81	0,29	1,23
-13,30	17,92	403,20	19,41	173	16	13,30	0,89	0,74
-20,10	24,72	556,33	19,55	178	21	13,49	0,85	0,55
-27,10	31,72	713,97	19,75	233	76	15,39	2,40	0,49
-35,60	40,22	905,39	20,07	279	122	16,82	3,03	0,42
-42,80	47,42	1067,54	20,40	334	177	18,38	3,73	0,39
-45,30	49,92	1123,84	20,53	462	305	21,59	6,11	0,43
-47,20	51,82	1166,62	20,63	872	715	29,60	13,80	0,57
-48,60	53,22	1198,15	20,71	1366	1209	37,01	22,72	0,70
-50,70	55,32	1245,44	20,83	1744	1587	41,81	28,69	0,76
-57,20	61,82	1391,82	21,22	2174	2017	46,67	32,63	0,76
-64,60	69,22	1558,47	21,72	2573	2416	50,76	34,90	0,73
-70,20	74,82	1684,58	22,13	2762	2605	52,59	34,82	0,70
-77,70	82,32	1853,48	22,72	2920	2763	54,07	33,56	0,66
-85,70	90,32	2033,64	23,39	2961	2804	54,45	31,05	0,60
-93,10	97,72	2200,29	24,06	2932	2775	54,18	28,40	0,55
-100,20	104,82	2360,18	24,73	2412	2255	49,15	21,51	0,47
-108,30	112,92	2542,60	25,53	1914	1757	43,79	15,56	0,39
-115,00	119,62	2693,48	26,21	1149	992	33,96	8,29	0,28
-122,60	127,22	2864,63	27,02	638	481	25,34	3,78	0,20
-130,40	135,02	3040,29	27,88	177	20	13,45	0,15	0,10
-138,00	142,62	3211,44	28,73	169	12	13,15	0,08	0,09
-146,10	150,72	3393,85	29,67	142	-15	12,08	-0,10	0,08
-150,30	154,92	3488,44	30,17	154	-3	12,57	-0,02	0,08
-157,50	162,12	3650,58	31,03	140	-17	12,00	-0,10	0,07
-165,80	170,42	3837,50	32,04	137	-20	11,87	-0,12	0,07
-173,70	178,32	4015,40	33,02	132	-25	11,66	-0,14	0,07
-177,40	182,02	4098,73	33,49	136	-21	11,83	-0,12	0,07

Messung Thallium bei 4% Transmission, Messzeit 40s

U [SKT]	U_k [SKT]	$B\rho$ [Gcm]	$\Delta B\rho$ [Gcm]	n	n_k	Δn_k	n_{rel}	Δn_{rel}
4,40	-0,22	-5,32	19,31	3	1	1,77	-4,55	8,17
12,50	7,88	177,10	19,40	3	1	1,77	0,13	0,22
20,00	15,38	346,00	19,55	8	6	2,85	0,39	0,19
27,20	22,58	508,14	19,75	6	4	2,48	0,18	0,11
35,00	30,38	683,80	20,04	5	3	2,27	0,10	0,07
42,40	37,78	850,44	20,38	9	7	3,02	0,19	0,08
50,70	46,08	1037,36	20,83	44	42	6,64	0,91	0,14
57,10	52,48	1181,49	21,22	86	84	9,28	1,60	0,18
57,60	52,98	1192,75	21,25	278	276	16,68	5,21	0,31
58,80	54,18	1219,77	21,33	483	481	21,98	8,88	0,41
59,50	54,88	1235,54	21,37	761	759	27,59	13,83	0,50
60,10	55,48	1249,05	21,41	1057	1055	32,51	19,02	0,59
66,30	61,68	1388,67	21,84	1359	1357	36,87	22,00	0,60
71,20	66,58	1499,02	22,21	1746	1744	41,79	26,19	0,63
76,10	71,48	1609,37	22,59	2178	2176	46,67	30,44	0,65
81,50	76,88	1730,98	23,03	2799	2797	52,91	36,38	0,69
89,90	85,28	1920,14	23,77	3438	3436	58,64	40,29	0,69
95,00	90,38	2035,00	24,23	3658	3656	60,48	40,45	0,67
100,50	95,88	2158,86	24,76	3842	3840	61,99	40,05	0,65
107,50	102,88	2316,50	25,45	4057	4055	63,70	39,41	0,62
115,30	110,68	2492,15	26,25	4197	4195	64,79	37,90	0,59
123,40	118,78	2674,56	27,11	3723	3721	61,02	31,33	0,51
130,30	125,68	2829,95	27,87	3223	3221	56,77	25,63	0,45
137,90	133,28	3001,10	28,72	2584	2582	50,83	19,37	0,38
145,00	140,38	3161,00	29,54	1901	1899	43,60	13,53	0,31
152,00	147,38	3318,64	30,37	1339	1337	36,59	9,07	0,25
160,40	155,78	3507,80	31,38	654	652	25,58	4,19	0,16
168,20	163,58	3683,46	32,34	177	175	13,31	1,07	0,08
175,30	170,68	3843,35	33,22	52	50	7,22	0,29	0,04
183,90	179,28	4037,02	34,31	13	11	3,63	0,06	0,02
187,70	183,08	4122,60	34,80	24	22	4,91	0,12	0,03

Kurieplot Natrium

η	$\Delta\eta$	ϵ	$\Delta\epsilon$	$F(11;\eta)$	$\sqrt{\dots}$	$\Delta\sqrt{\dots}$
0,1375	0,0113	1,0094	0,0015	0,3793	2,3390	9,9848
0,2365	0,0114	1,0276	0,0026	0,4864	2,7479	2,2859
0,3264	0,0115	1,0519	0,0036	0,5725	2,0789	1,3360
0,4189	0,0116	1,0842	0,0045	0,6428	2,8649	0,5817
0,5312	0,0118	1,1323	0,0055	0,7020	2,6804	0,3709
0,6263	0,0120	1,1799	0,0064	0,7338	2,6236	0,2738
0,6593	0,0120	1,1978	0,0066	0,7418	3,2294	0,2307
0,6844	0,0121	1,2118	0,0068	0,7471	4,7187	0,2003
0,7029	0,0121	1,2223	0,0070	0,7506	5,9349	0,1897
0,7307	0,0122	1,2385	0,0072	0,7553	6,4786	0,1802
0,8166	0,0125	1,2910	0,0079	0,7660	6,3562	0,1562
0,9143	0,0127	1,3550	0,0086	0,7736	6,0348	0,1351
0,9883	0,0130	1,4060	0,0091	0,7771	5,6782	0,1221
1,0874	0,0133	1,4773	0,0098	0,7801	5,1753	0,1076
1,1931	0,0137	1,5568	0,0105	0,7819	4,6236	0,0950
1,2909	0,0141	1,6329	0,0112	0,7828	4,1485	0,0853
1,3847	0,0145	1,7080	0,0118	0,7833	3,4076	0,0773
1,4917	0,0150	1,7959	0,0124	0,7837	2,7224	0,0699
1,5802	0,0154	1,8700	0,0130	0,7839	1,8921	0,0658
1,6806	0,0159	1,9556	0,0136	0,7840	1,2113	0,0642
1,7837	0,0164	2,0449	0,0143	0,7840	0,2276	0,1531
1,8841	0,0169	2,1330	0,0149	0,7841	0,1634	0,1791
1,9911	0,0174	2,2281	0,0156	0,7841	0,0170	1,3592
2,0466	0,0177	2,2778	0,0159	0,7841	0,0165	1,3420
2,1417	0,0182	2,3637	0,0165	0,7841	0,0159	1,1748
2,2514	0,0188	2,4635	0,0172	0,7841	0,0152	1,0566
2,3558	0,0194	2,5592	0,0178	0,7841	0,0145	0,9512
2,4047	0,0196	2,6043	0,0181	0,7841	0,0143	0,9276

Kurieplot Thallium

η	$\Delta\eta$	ϵ	$\Delta\epsilon$	$F(82; \eta)$	$\sqrt{\dots}$	$\Delta\sqrt{\dots}$
0,1039	0,0114	1,0054	0,0012	207,8501	0,0765	0,1356
0,2030	0,0115	1,0204	0,0023	120,6940	0,1249	0,0595
0,2981	0,0116	1,0435	0,0033	88,3526	0,0803	0,0498
0,4012	0,0118	1,0775	0,0044	69,4335	0,0574	0,0434
0,4989	0,0120	1,1176	0,0053	58,1695	0,0756	0,0327
0,6086	0,0122	1,1706	0,0064	49,5071	0,1608	0,0255
0,6932	0,0124	1,2167	0,0071	44,5463	0,2064	0,0229
0,6998	0,0125	1,2205	0,0071	44,2047	0,3715	0,0227
0,7156	0,0125	1,2297	0,0073	43,4082	0,4821	0,0225
0,7249	0,0125	1,2351	0,0074	42,9582	0,5997	0,0225
0,7328	0,0126	1,2398	0,0074	42,5806	0,7011	0,0225
0,8147	0,0128	1,2899	0,0081	39,0716	0,7320	0,0208
0,8794	0,0130	1,3317	0,0086	36,7206	0,7804	0,0197
0,9442	0,0133	1,3753	0,0091	34,6636	0,8224	0,0188
1,0155	0,0135	1,4252	0,0096	32,6737	0,8771	0,0179
1,1265	0,0139	1,5063	0,0104	30,0360	0,8891	0,0164
1,1939	0,0142	1,5574	0,0109	28,6527	0,8714	0,0156
1,2666	0,0145	1,6137	0,0114	27,3111	0,8470	0,0148
1,3590	0,0149	1,6873	0,0120	25,7928	0,8163	0,0139
1,4621	0,0154	1,7714	0,0127	24,3072	0,7759	0,0130
1,5691	0,0159	1,8607	0,0134	22,9529	0,6837	0,0120
1,6603	0,0163	1,9382	0,0140	21,9246	0,6027	0,0112
1,7607	0,0169	2,0249	0,0147	20,9042	0,5098	0,0105
1,8545	0,0173	2,1069	0,0153	20,0419	0,4156	0,0099
1,9470	0,0178	2,1888	0,0158	19,2657	0,3324	0,0093
2,0580	0,0184	2,2881	0,0166	18,4181	0,2197	0,0087
2,1610	0,0190	2,3812	0,0172	17,7020	0,1084	0,0083
2,2548	0,0195	2,4666	0,0178	17,1019	0,0555	0,0080
2,3685	0,0201	2,5709	0,0185	16,4330	0,0248	0,0082
2,4187	0,0204	2,6172	0,0189	16,1556	0,0343	0,0077